朝倉物理学大系

荒船次郎|江沢 洋|中村孔一|米沢富美子――編集

8

量子力学の数学的構造II

新井朝雄
江沢 洋
[著]

朝倉書店

編集

荒船次郎
東京大学教授

江沢　洋
学習院大学教授

中村孔一
明治大学教授

米沢富美子
慶應義塾大学教授

はじめに

力学は力と運動の科学である．極微の世界をさぐって，それは量子力学にゆきついた．そこでは，運動は点の位置の時間変化ではなかった．ニュートンが位置の時間微分として定立した速度は，運動の基本量であることをやめて，その地位を運動量にゆずった．そこで生まれた数学的構造が本書の主題である．

いま，運動の基本量といった．それはニュートン以来の力学—今日の，いわゆる古典力学—においては，質点の刻々の状態が当の質点の位置と速度の刻々の値で指定されるという意味であった．質点の（たとえば，彗星の）任意の一時刻における状態（位置と速度）を与えると，それに作用する力の法則（彗星の場合なら，万有引力の法則）が知れているとしてだが，以後の刻々の状態（位置と速度）は一意にきまってしまう．このように，状態概念は因果律にしっかり結びついていた．そして，ここから出発して古典力学の数学的構造は組み立てられた．

たしかに，力学は質点の位置と運動量を基本量にとって定式化することもできたのである．質点の刻々の状態は位置と運動量を座標軸とする相空間の一点で表現できる．実際，その任意の一時刻における位置を与えると，以後の刻々の位置はきまる．しかし，それをきめるハミルトン関数は基本的にはラグランジュ関数から導くのであって，後者は位置と速度の関数であった．古典力学の基本の基本は質点の位置とその時間変化であったといえるだろう．

量子力学にくると，質点の一時刻における状態は無限次元ヒルベルト空間の単位ベクトル ψ_t で表現される．その指す向きが時間 t とともに変ってゆく—これが質点の運動の表現になる．そして，質点の位置は，状態ベクトルに作用する演算子で表現される．運動量，またしかり．最早それらは古典力学におけるような数値ではない．質点の他の物理量—エネルギー，角運動量など—も演

算子で表わされるが，それらは位置と運動量の演算子から構成される．

具体的にいえば，一つの質点を対象とする場合，ヒルベルト空間としては R^3 で定義した L^2 関数 $\psi(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x} \in \mathsf{R}^3$ の全体をとり，位置座標の演算子 $\hat{\boldsymbol{X}}$ を $\hat{\boldsymbol{X}}\psi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\psi(\boldsymbol{x})$ によって定義することができる．運動量の演算子 $\hat{\boldsymbol{P}}$ は位置座標の演算子 $\hat{\boldsymbol{X}}$ とともに $\hat{P}_k\hat{X}_l - \hat{X}_l\hat{P}_k = -i\hbar\delta_{kl}\hat{I}$（正準交換関係）をみたし自己共役たるべしというのが量子力学の公理の一つである．k，l はベクトルの直角座標成分を表わす．$\hat{I}$ は恒等演算子．たとえば，$\hat{P}_k = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ がこれをみたす．といっても，$\hat{\boldsymbol{P}}$ も $\hat{\boldsymbol{X}}$ も非有界な演算子であるから定義域が問題になり，それを自己共役性が実現されるように決定しなければならない．位置と運動量の演算子から他の物理量の演算子を構成する場合にも，同じことが問題になる．

しかし，質点の力学の表現はこれに限らない．いろいろの表現が可能である．それらを束ねて抽象的に表現することもできる．こうして数学的構造の問題がいっそう深まることになる．

物理にかえろう．位置座標が数値であることを止めてしまったとき，当の質点とは何であるのか？　この問いは，量子力学でいう質点を実験にかけるとは，どういうことか，という問いに発展する．そして古典的な描像で解釈するとき粒子と波動の二重性が現われる．波動性の状態 $\psi_t(\boldsymbol{x})$ で位置の観測を—精度 Δx，Δy，Δz で—すると確率 $|\psi_t(\boldsymbol{x})|^2\Delta x\Delta y\Delta z$ で位置 $\boldsymbol{x}$ の小体積の中に粒子が見いだされる．

こうして，われわれは古典的な直観には奇妙としか映らない世界像に導かれるが，その数学的構造は整然としている．量子力学は極微の世界を究めるなかで生まれたが，いまやニュートン力学の世界もある近似として包含し物理学全体の基礎理論とみなされるまでになっている．演算子の世界では位置座標の時間微分としての速度をはじめニュートン力学の諸関係も復活している．

量子力学の数学的構造を組み立てる素材は，上に説明したとおりヒルベルト空間と，そのベクトルに作用する演算子（作用素ともいう）である．本書は，その素材の解説からはじめて，量子力学を数学的に組み立ててゆく—その物理的背景を説明しながら！　そして，続く物理学大系・第 II 期に物理の主要な問題の

扱いを示す計画である．

『量子力学の数学的基礎』を J. von Neumann が書いたのは 1932 年．これは hypermaximal な演算子（今日の，いわゆる自己共役演算子）という概念を打ちたてて量子力学の数学的枠組みを提出した．その額縁に物理の絵を描き入れた最初は原子のエネルギー演算子が自己共役であることを証明した加藤敏夫（1944，公刊は戦争のため 1951）である．それ以来，量子力学の数学的構造の研究は大きく発展し，今日もなお発展を続けている．その背景には，摂動論に頼ってきた輻射と物質の相互作用の理論が強いレーザー光の登場によって変革を促されているなどの状況がある．問題は場の量子論の基礎におよび，極めて深い．かつては物理の側に演算子の自己共役性とエルミート性を区別しない時代もあったが，研究者も変ってきている．

いま，数学から物理への関心が急速に高まり，物理は数学の方法を取り入れることに熱心である．この交流の時代に，両者の間の橋をひろげ，対話と協力をいっそう盛んにするために本書が役立てば，と切に願っている．

1999 年 6 月

新井朝雄
江沢　洋

目　　次

第 I 巻目次

3
量子力学の一般原理

この章から，量子力学の数学的枠組みを公理論的な形で論述する．これまでの章で準備してきた数学的諸概念が量子力学の文脈の中に位置づけられ，物理的な内容を獲得する．本章では，量子力学の基礎的概念として，量子系の状態と物理量，正準量子化と正準交換関係の表現，ウィグナーの定理，ハミルトニアンと状態の時間発展，シュレーディンガー方程式，ハイゼンベルク演算子，物理量の時間発展，ハイゼンベルクの運動方程式をとりあげる．応用上，ある意味で基本となる具体例として，二つの量子系— 自由粒子と 1 次元調和振動子—を詳しく解析する．

3.1　基本的公理系—状態と物理量

3.1.1　状　　態

一般的に言って，物理系を記述するための基礎となる概念のひとつは**状態**である．この概念は，抽象的に述べるならば，ある数学的対象によって表現され，その対象から特定の規則によって，考察下にある物理系に関する知識（情報）が得られるようなものである．この場合，物理系の動力学的な側面，すなわち，時間の推移に関わる力学的側面は，状態の時間発展という形で考察されることになる．状態の概念は対象とする物理系の種類によって異なりうる．たとえば，質点の古典力学においては，系の状態は相空間の点によって表わされるが，これは熱力学や電磁気学が扱う系の状態の概念とは異なる．

量子力学が対象とする系，すなわち，量子力学系（あるいは単に量子系という）を記述するにあたっても，状態の概念を定義することから始めるのが適切である．序章で述べたように，量子力学は，微視的な系に対する古典物理学の本質的困難あるいは限界を克服する試みの中から生まれてきた．当然，予想さ

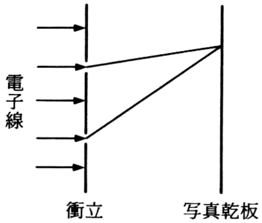


図 3.1　電子線束の干渉の実験

れるように，量子力学における状態の概念は，古典力学におけるそれとは根本的に異なることになる．それがどのようなものでなければならないかは，微視的な系におけるいくつかの観測事実に基づいてある程度推測することができる．これをまず簡単に見ておこう．

例として，二つのスリットをもった衝立を電子線束が通過し，写真乾板または蛍光板に入射する実験をとりあげてみよう（図 3.1）．

この場合，よく知られているように，写真乾板の上には，干渉縞が現われる．最近の精密な実験によれば，この干渉縞は，（電子の粒子的描像において）電子 1 個が写真乾板上に入射する試行の繰り返しによって得られる，と見るのが自然である*[1]．この観点からは，図 3.1 のような環境の中で電子 1 個が写真乾板の上に見いだされる現象は確率的な事象であるということであり，写真乾板上の任意の点での縞の強度は，そのような試行において，電子がその点に入射する相対確率をあたえる量であるとみなされる．ところで，そのような確率を計算するには，今度は電子の波動的描像に移って，光やほかの通常の波動の場合と同様に，両方のスリットから出ていく二つの球面波（電子の波）の振幅を，問題にしている場所における波の位相を考慮して，加え合わせる必要がある．こうして，図 3.1 の実験装置において生じる現象を古典的な概念（粒子，波動）で理解しようとおもえば，その両方が相補う仕方で必要とされることがわかる*[2]．この点は素粒子の本性を誤認しないために留意すべき重要な点のひとつである．スリットのある衝立より右側における電子の状態は，おのおの一方のスリット

---

*[1] 外村 彰『量子力学を見る』（岩波書店，1995）を参照．

*[2] ニールス ボーア (N. Bohr) のいう**相補性**の考え方のひとつの根拠である．

から出ていく球面波を記述している関数— それぞれ，Ψ_1, Ψ_2 としよう— の重ね合わせ，すなわち，$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ によって特徴づけられるはずである．これは，Ψ_1, Ψ_2 が考察下の系の可能な状態を記述するものであれば，その重ね合わせ Ψ も系の可能な状態を記述することを意味する．

この事実は，次のような一般化を示唆する：微視的な系にあっては，系が状態 $\Psi_1, \Psi_2, \cdots$，にあることができるならばそれはまたこれらの状態の重ね合わせの結果として得られる状態 $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \cdots$ にもあることができる（Ψ_n，$n = 1, 2, \cdots$ は，必ずしも関数で表される必要はなく，和とスカラー倍の演算が定義されているような代数的対象であればよい）．これは通常，**重ね合わせの原理** (principle of superposition) とよばれている．

この場合，注意しなければならないのは，いまふれた，微視的な系の状態に関する重ね合わせは，古典的な（線形）振動論における重ね合わせとは次の点で本質的に異なるということである．すなわち，ある振動状態が関数 f で記述されるならば，この同じ状態を重ね合わせることにより，たとえば，2 倍の振幅をもつ振動状態を記述する関数 $f + f = 2f$ が得られる．これは明らかに f とは異なる振動状態である．これに反し，微視的な系の状態に関しては事情が異なる：もし，Ψ がある状態を記述するならば，c を 0 でない任意の複素定数とするとき，$c\Psi$ も Ψ と同じ状態を記述するということである．こう考えることにより，観測事実がうまく説明されるのである．

重ね合わせの原理というのは，数学的に見れば要するに線形性の要請である．したがって，重ね合わせの原理を表現するのに適した数学的概念として（抽象的な意味での）ベクトルに注意を向けるのは自然である．こうして，まず，微視的な系を任意にひとつ固定して考えるとき，その系の可能な状態の全体は数学的にはベクトル空間としてとらえられることが推測される．このようなベクトル空間を状態のベクトル空間とよぼう．

ベクトル空間というだけでは，計量的構造については何も言及されないので，物理と関連づけるには不十分であることは明らかである．他方，微視的な系のひとつの特質として，ある状態を指定し，その状態で物理量を観測したとき，その観測値は一般には一意的に定まらず，確率的に分布するという観測事実がある．観測するとある値が得られるわけであるが，これは，観測によって，観測

前の状態がある（一般には別の）状態に遷移したものと解釈される．したがって，微視的な系の状態というのは，観測を通して，ある確率でもって，別の状態に移ることが可能となるようなものである．それゆえ，状態のベクトル空間は，そのような確率—**状態の遷移確率**—を記述できるものでなければならないことが要請される．遷移確率は非負の数で表わされるが，上述の電子線の例における波動的な描像を顧慮すると，それはある複素数の絶対値の 2 乗としてあたえられると考えるのが自然である（この複素数は**遷移確率振幅**とよばれる）．これは次の考察へと導く．すなわち，微視的な系の状態のベクトル空間は，その中の任意の二つの状態を表わすベクトル Ψ_1, Ψ_2 に対して，ある複素数を対応させる機能を備えていなければならない．このような機能で重ね合わせの原理（線形性）とうまく調和するものとして内積がある．こうして，状態のベクトル空間の候補は内積空間にしぼられてくる．だが，1 章 1.1 節で述べたように，内積空間というだけでは，完備性は保証されないので理論的に扱いにくい．そこで，完備性を備えた内積空間，すなわち，ヒルベルト空間が状態のベクトル空間を記述する数学的対象である，という仮説に到達する．それが次の公理である．

公理 QM1　量子系の**状態** (state) はヒルベルト空間 H の零でないベクトルによって記述される．このベクトルを**状態ベクトル** (state vector) という．ただし，零でない任意の複素数 α に対して，状態ベクトル $\Psi \in \mathsf{H}$ と $\alpha\Psi$ は同一の状態を表わすものとする．

公理 QM1 にいうヒルベルト空間 H を**状態のヒルベルト空間** (Hilbert space of states) あるいは単に**状態空間**（state space）という．この公理は，量子系が相対論的か否か，あるいは系の自由度が有限か無限かによらず成立すると仮定される[*3]．以下では，状態ベクトル Ψ によって表わされる状態を，しばしば，単に「状態 Ψ」という．

公理 QM1 について若干の注意をしておこう．

(1) 状態ベクトルは零ベクトルではないから，規格化が可能である．そこで，

[*3] 本書で，相対論というときは，アインシュタインの特殊相対性理論をさす．

「量子系の状態は，ヒルベルト空間の単位ベクトルによって表わされる」を状態の公理とする場合がある．この場合は，単位ベクトル Ψ によって表わされる状態と，これに絶対値が 1 の任意の複素数 α を乗じたベクトル $\alpha\Psi$ によって表わされる状態は同一視されることになる．

(2) 公理 QM1 にいう状態ベクトルの同一視は，数学的には，次のように理解される．まず，H の零でないベクトル Ψ, Φ について，ある $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ があって，$\Psi = \alpha\Phi$ が成り立つとき，$\Psi \sim \Phi$ と書く．この関係 $\sim$ は集合 $\mathsf{H}' := \mathsf{H}\setminus\{0\}$ におけるひとつの同値関係をあたえる．したがって，H' はこの同値関係によって類別される．この同値関係から決まる商空間 $P(\mathsf{H}) := \mathsf{H}'/\sim$ を H の**射影空間** (projective space) という．この空間の元は H の**射線** (ray) とよばれる．公理 QM1 にいう状態ベクトルの同一視は，いま定義した同値関係 $\sim$ の意味で同値なベクトルを同じものとみなすことに他ならない．したがって，公理 QM1 は，量子系の状態は H の射線によって表わされる，ということと同等である．$P(\mathsf{H})$ はベクトル空間ではないので，公理 QM1 の意味での状態に対しては，もはや重ね合わせの原理について語ることはできないことに注意しよう*4．

(3) 状態ベクトルは，定義によって，物理的に実現可能な状態を記述する．だが，公理 QM1 では，状態のヒルベルト空間 H の零でないすべてのベクトルが物理的に実現可能な状態を記述することは要求されていない．実際，そのような要請は強すぎるのである．たとえば，後に見るように，量子系の全エネルギーは状態のヒルベルト空間 H で働く自己共役演算子 – H としよう – によって表わされるが，H が非有界で定義域 $\mathsf{D}(H)$ が H 全体に等しくない場合，$\mathsf{D}(H)$ に属さない，零でないベクトルは物理的に実現可能な状態とはみなすことはできない．なぜなら，そのようなベクトルはエネルギーの大きさが無限大の状態に対応すると解釈されるからである*5．それぞれの量子系に応じて，状態ベクトルの集合は異なりうる．状態ベクトルの必要条件のひとつは，それが，考察下にある量子系のすべての物理量を記述する自己共役演算子（次の公理 QM2 を参照）の定義域に含まれていることである．

---

*4 重ね合わせの原理は，状態を表わす状態ベクトルに対してのみ語られる．

*5 H のスペクトル測度を E_H とすれば，$\Psi \notin \mathsf{D}(H) \iff \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\langle \Psi, E_H(\lambda)\Psi\rangle = \infty$ に注意．

(4) 量子系の状態に関して，より厳密に考察するならば，実は，重ね合わせの原理は，系のすべての状態ベクトルに対して，常に成り立っているとは限らない．つまり，状態のヒルベルト空間 H の任意の二つの状態ベクトル Ψ, Φ の一次結合 $\alpha\Psi + \beta\Phi$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$ が常に状態ベクトルを表わすとは限らないということである．このような場合，特定の状態（複数）に対しては，それらを表わす状態ベクトルについて，重ね合わせの原理が禁止されているという意味で，状態のヒルベルト空間に**超選択則** (superselection rule) が働いているという．たとえば，陽子 1 個だけの状態と中性子 1 個だけの状態との重ね合わせ，すなわち，ある確率 p $(0 < p < 1)$ で陽子，確率 $1 - p$ で中性子であるような 1 粒子状態は自然界に発見されていない．詳細は割愛するが，超選択則が働くような量子系の状態のヒルベルト空間は，超選択則が働かない閉部分空間の直和として定式化することが可能である[*6]．したがって，実際上は，多くの場合，状態のヒルベルト空間には超選択則が働いていないとして考察をすすめても一般性を失わない．

(5) 定理 1.41 で見たように，可分な無限次元複素ヒルベルト空間は l^2 と同型であり，この意味では，可分な無限次元複素ヒルベルト空間によって記述される，量子系の状態空間は本質的にひとつである．したがって，そのような量子系の状態のヒルベルト空間は l^2 としてもよい．だが，公理論的な観点からは，状態のヒルベルト空間を l^2 に固定して論を進めるのは得策ではない．なぜなら，公理論的アプローチは，量子力学の普遍的な側面を追求するものであり，そのためには，量子力学の一般原理をあたえる公理系は，具象的なヒルベルト空間とは独立した形で定式化されなければならないからである．幾何学的な言い方をすれば，“座標から自由な” な形で量子力学の定式化を行なうということである．そうすることによって，量子力学の普遍的本質が明らかにされ，種々の個別的な量子系の現象を統一的にとらえることが可能になるのである．これと関連した，数学的な観点からの理由については，すでに，定理 1.41 のすぐあとの注意で述べた．また，次の点も重要である．個々の具体的な量子系の状態

*6 この点について，さらに詳しいことは，ボゴリューボフ他『場の量子論の数学的方法』（江沢洋 他訳，東京図書，1972）の第 2 章 §1.3, R. F. Streater, A. S. Wightman: *PCT, Spin and Statistics, and All That* (Benjamin, 1964) の Chap.1, §1.1 等を参照．

を記述するヒルベルト空間をどのように人間が選ぶかは，量子系を構成する対象と，それに対してどういう描像（これは本質的に古典的，巨視的である）—波動的描像または粒子的描像あるいは他の描像—を基本に据えるかによって異なりうる（これは観測と不可分の関係にある）．ヒルベルト空間の同型をあたえるユニタリ変換は，量子力学的には，ひとつの量子系に対して据えられる種々の物理的描像の間を補完する働きをするものとして解釈される（通常の意味での物理的描像というのは，そもそも，観測を通して確立されるものであり，本質的に巨視的な感覚的知覚に依存するものであるから，通常の感覚では直接とらえられない量子系に対する描像は観測と不即不離の関係にあり，必然的に一面的，部分的にならざるをえず，どの描像が最も"正しい"かを問題にすることは無意味である．むしろ，ひとつの量子系に対して，これを観測する手段に応じて，種々の描像が可能であり，描像ごとに，これにふさわしい状態のヒルベルト空間の実現があり，それらは互いに同型になっていると考えるのが適切である．量子的な現象は，"現象"というものが本来，観測手段と切り離すことはできないことを強く示唆する）．抽象的な定式化の利点のひとつは，特定の物理的描像に依存しない本質的側面を論じられるという点にある*7．

量子力学が適用されなければならない（微視的）対象（電子，陽子等の素粒子あるいは原子，分子など）を以下ではしばしば**量子力学的粒子** (quantum mechanical particle) または単に粒子とよぶ．

例 3.1 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の中を運動する N 個の（空間的自由度だけを有する）量子力学的粒子の状態を記述するヒルベルト空間として，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{3N})$ が用いられる．これに関する物理的な発見法的根拠については，3.3 節で述べる．

---

*7 量子系の状態のヒルベルト空間を一般的に決定するためのひとつの重要な原理は，理論に要求される対称性である．現代数学の観点からは，対称性は群によって表わされる．量子系がある対称性をもつことが要求されるならば，この量子系の状態のヒルベルト空間は，その対称性を表わす群のユニタリ表現を担うヒルベルト空間であることが要請される．こうした事柄も含めて，量子力学における対称性については，続編『量子物理の数理』で詳しく論じる予定である．

3.1.2　物　理　量

以下，量子系を任意にひとつ固定して考え，これに対応する状態のヒルベルト空間を H で表わす．すでにふれたように，量子系においては，ひとつの物理量（たとえば，エネルギー，位置，運動量等）を同一の状態において観測してもその観測値は一般には一意的に決まらず確率的に分布する．したがって，量子力学においては，物理量とその観測値を厳密に区別する必要がある．これも量子力学が古典力学と本質的に異なる点のひとつである．有限自由度 n の古典力学では，一般化座標 $q \in \mathbb{R}^n$ と一般化運動量 $p \in \mathbb{R}^n$ によって状態が一意的に指定される．物理量は，基本的には，q, p の実数値関数である．したがって，q, p の観測値は，状態を一意的に定め，物理量の観測値を一意的に決める．この意味で，古典力学では観測値と状態をとりたてて区別する必要はない．ところが，すでに言及したように，量子系においては，古典物理学は破綻し，古典的な力学的諸概念は本来の意味を失う．量子力学においては，古典力学における物理量が有する直観的性質はある限定された意味でしか適用されえない．量子力学でも，位置，運動量，エネルギー等の言葉を古典力学から借用するが，それらは，本質的には，系について行なうある観測過程の特性を表わす以外のものではないことを注意しておこう．

量子系の物理量は次の公理によって特徴づけられる：

公理 QM2　物理量—**観測可能量**あるいは**オブザーヴァブル** (observable) ともいう—は H 上の自己共役演算子によって表わされる．物理量を表わす自己共役演算子の任意の固有ベクトルは状態を表わす．

この公理の背後にある物理的な発見法的見方は次の通りである：すでに注意したように，量子系においては，物理量と物理量の観測値は別物と考えなければならない．系の状態がヒルベルト空間の元であることを考慮すると，このヒルベルト空間上で働く演算子も何らかの物理的な対象を表現していると考えるのは自然である．ところで，演算子にはスペクトルの概念が同伴する．スペクトルは数の集合であるから，これは観測値と結びつく可能性がある．こうして，量子系の物理量は状態のヒルベルト空間で働く演算子によって記述され，そのスペクトルがこの物理量の観測値の全体を表わすという，ある意味で自然な考

え方に導かれる．この場合，実際の物理量の観測値は実数であるから，物理量を表わす演算子は，そのスペクトルが実数の部分集合となるものでなければならない．そのような演算子を一般的にさがすとすれば，それは自己共役演算子だということになる（定理 2.42 を参照）．物理量が自己共役演算子で表わされるという要請は，単にスペクトルの問題にととまらず，以下の公理 QM3 で定式化するように，量子力学の確率解釈にとっても極めて自然なものなのである．

公理 QM2 は，H 上のすべての自己共役演算子が物理量であることを主張するものではない．この点には注意されたい．このような要請はきつすぎるであろうし，以下の公理論的展開にとって必要でもない．物理量を表わす自己共役演算子の集合がどのようなものであるかは，一般的には決定され得ない．それは，個々の量子系に依存しながら決まる事柄である[*8]．

今後，物理量とそれを表わす自己共役演算子を同一視して，物理量 A (A は自己共役演算子）という言い方をする．

さしあたっては必要ではないが，ここで，二つの量子系の相等の定義をあたえておこう．公理 QM1 と QM2 によって，任意の量子系を S とすれば，これは状態のヒルベルト空間 H_S と物理量の集合 $\mathcal{O}_S$ の組 $S = \{\mathsf{H}_S, \mathcal{O}_S\}$ によって特徴づけられる．二つの量子系 S, S' が**同等**（**同値**）であるとは，$\{\mathsf{H}_S, \mathcal{O}_S\}$ と $\{\mathsf{H}_{S'}, \mathcal{O}_{S'}\}$ がユニタリ同値であるとき，すなわち，ユニタリ変換 $U : \mathsf{H}_S \to \mathsf{H}_{S'}$ で，$\mathcal{O}_{S'} = \{UAU^{-1} | A \in \mathcal{O}_S\}$ をみたすものが存在するときをいう[*9]．量子系 S, S' が同等でないとき，S と S' は異なるという．

3.1.3　観測に関する確率の公理

上に注意したように，状態 $\Psi \in \mathsf{H}$ における物理量 A の観測値は確率的に分布するので，それはある確率変数の実現値であると考えるのが自然である．こ

[*8] 宇宙全体をひとつの巨大な量子系とみれば，物理量を表わす自己共役演算子の集合は，原理的にはひとつに決まっていると考えられる．だが，それを決定する原理があたえられなければ，そう言ったところであまり意味はない．

[*9] この背後にある考え方は次の通りである．物理量の観測値は最終的には状態のヒルベルト空間の内積を用いて表現される．内積はユニタリ変換で不変である．したがって，ユニタリ同値な量子系は同一の物理的結果をもたらす．ゆえに，そのような量子系は同一視されなければならない．ここで定義した，量子系の同等性は量子系の集合に同値関係をあたえる．したがって，量子系というのは，実は，ひとつの同値類なのである．

のことを顧慮して，物理量の観測の特性に関する公理を次のように定式化する：

公理 QM3

(i) 状態 Ψ において，物理量 A を観測したときに得られる観測値は確率的に分布し，その分布はある確率変数 $X(A,\Psi)$ によって記述される．これを**観測確率変数**とよぶ．

(ii) A に同伴するスペクトル測度を E_A とすれば，任意のボレル集合 $J\subset\mathbb{R}$ に対して，$X(A,\Psi)$ の値が J に属する確率，すなわち，観測値が J の中に入る確率は $\|E_A(J)\Psi\|^2/\|\Psi\|^2$ に等しい．

(iii) 物理量 A を観測したとき，その観測値が誤差をこめて，ボレル集合 J の中に見いだされたとすれば，観測直後の状態は，$\mathsf{R}(E_A(J))$ のベクトルによって記述される状態になる．

注意 一般には，単独の物理量の測定では状態ベクトルまでは定まらない．ベクトルが定まるのは，後に続編『量子物理の数理』で定義する“可換な観測量の極大集合”（極大可換観測量，maximal set of commuting observables）全体の測定をしたときである．続編『量子物理の数理』で示すとおり，可換な観測量の極大集合は一つの自己共役演算子に集約できる．公理 QM3(iii) にいう演算子 A はこの意味のものである．

この公理の (ii) は，言い換えれば，観測確率変数 $X(A,\Psi)$ の分布 $P^{X(A,\Psi)}$ が $\|E_A(\cdot)\Psi^2\|/\|\Psi\|^2$ に等しいことを要請するものである[*10]：

$$P^{X(A,\Psi)}(J)=\frac{\|E_A(J)\Psi\|^2}{\|\Psi\|^2},\quad J\in\mathsf{B}^1. \tag{3.1}$$

これが可能であるためには，$\|E_A(\cdot)\Psi\|^2/\|\Psi\|^2$ が可測空間 $(\mathbb{R},\mathsf{B}^1)$ 上の確率測度でなければならないが，これはスペクトル測度の性質によって保証される．分布が等しいような確率変数は同一視することにすれば，観測確率変数の具体的な実現は，ここでは，問題にならないことに注意しよう．公理 QM1 によって，状態ベクトル Ψ と $\alpha\Psi$ $(\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\})$ は同じ状態を記述するが，(3.1) によって，$P^{X(A,\Psi)}=P^{X(A,\alpha\Psi)}$ である．したがって，確率分布 $P^{X(A,\Psi)}$ は確かに Ψ の同値類だけで決まっている．

---

*10 確率論の基本事項については，付録 A，A.8 節を参照

公理 QM3 の (iii)—これは観測値がある幅の連続スペクトルを形成する場合にも適用される— は次に述べる意味で必要とされる．一般に，量子系の状態は観測によって擾乱され得る．この擾乱による系の変化は，後に述べる，状態の時間発展—これはある時刻の状態を指定すれば，後の時刻の状態は完全に一意的に決定される，という意味で因果的—とは異なる種類の変化であり，さしあたって，非因果的（確率的）なものとみなされる．この変化の仕方を規定するのが公理 QM3(iii) なのである．これは，量子系がどの状態にあるかを同定するための基礎になる．

公理 QM3(iii) は，特別な場合として（J が 1 点からなる場合），次のことを意味する：物理量 A を観測して，観測値として λ が得られたとすれば，観測直後の状態は $\mathsf{R}(E_A(\{\lambda\}))$ のベクトルによって記述される状態になる．ところで，$\mathsf{R}(E_A(\{\lambda\}))$ は，A の固有値 λ に属する固有空間である（定理 2.84(i)）．したがって，いまの場合，観測直後の状態は，A の固有値 λ に属する固有ベクトルによって記述される．

観測によって状態が非因果的と見える擾乱を被り得るという事実も微視的な系が巨視的な系と根本的に異なる点のひとつである．巨視的な系の状態は，観測による影響を受けない，あるいはそれは無視され得る．観測による状態の非因果的変化はしばしば “波束の収縮” とよばれる．観測による擾乱をどうとらえるかは量子力学の解釈の問題も含めて議論の余地がある問題である．この問題は**観測の理論**とよばれる分野によって扱われる．だが，この理論については，続編『量子物理の数理』で述べる．

3.1.4 公理系からの帰結

上述の公理系からいかなる事実が導かれるかを見よう．状態 Ψ における物理量 A の観測値の期待値は，確率変数の期待値の定義にしたがって，

$$E[X(A,\Psi)] = \int_{\mathbb{R}} x\, dP^{X(A,\Psi)}(x) \tag{3.2}$$

である（付録 A，A.8 節の (A.29) を参照）．

命題 3.1 任意の状態 $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ に対して，

$$E[X(A,\Psi)] = \frac{\langle \Psi, A\Psi \rangle}{\|\Psi\|^2}. \tag{3.3}$$

証明 (3.1) によって，(3.2) の右辺は $\int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\langle \Psi, E_A(\lambda)\Psi\rangle / \|\Psi\|^2$ に等しい．スペクトル定理により，これは (3.3) の右辺に等しい． □

命題 3.1 は，ヒルベルト空間 H の単位ベクトル $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ と $A\Psi$ の内積 $\langle \Psi, A\Psi \rangle$ は，量子力学の文脈では，Ψ が状態ベクトルのとき，物理量 A の観測値の期待値に等しいことを示している．このことは，また，物理量 A の観測値の期待値の全体は，自己共役演算子 A の数域 $\mathsf{N}(A)$ に含まれることを意味する*11．特に，$\mathsf{D}(A) \setminus \{0\}$ のベクトルがすべて状態ベクトルであれば，物理量 A の観測値の期待値の全体と $\mathsf{N}(A)$ は一致する．

通常，(3.3) も公理として設定されるが，ここでは，観測確率変数なる概念を導入したことにより，公理系からのひとつの帰結として得られていることを注意しておく．

命題 3.2 物理量 A が固有値 λ をもつ場合を考え，これに対応する固有空間を $\mathsf{H}_\lambda = \ker(A-\lambda)$，$\{\Psi_n\}_{n=1}^N$ を H_λ の任意の CONS とする (N は高々可算)．このとき，次の (i), (ii) が成り立つ．

(i) 状態 Ψ における A の観測値が λ である確率は $\sum_{n=1}^N |\langle \Psi_n, \Psi \rangle|^2 / \|\Psi\|^2$ である．

(ii) H_λ に属する任意の状態において，A を観測したとき，確率 1 で λ が得られる．

証明 (i) 公理 QM3(i) によって，$X(A,\Psi)$ の値が λ である確率は $\|E_A(\{\lambda\})\Psi\|^2 / \|\Psi\|^2$ である．$E_A(\{\lambda\})$ は，固有値 λ に対する固有空間への射影演算子であるから（定理 2.84(i)），(2.69) によって，

$$E_A(\{\lambda\})\Psi = \sum_{n=1}^N \langle \Psi_n, \Psi \rangle \Psi_n.$$

---

*11 対称演算子の数域については，2 章，2.3 節，(2.56) を参照．

したがって，$\|E_A(\{\lambda\})\Psi\|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle \Psi_n, \Psi\rangle|^2$.

(ii) $\Psi \in \mathsf{H}_\lambda$ ならば，$E(\{\lambda\})\Psi = \Psi$ であるから，$\|E_A(\{\lambda\})\Psi\|^2 = \|\Psi\|^2$. したがって，状態 Ψ において，A の観測値が λ である確率は 1 である． □

上の命題の (ii) から，物理量の固有値に属する固有ベクトルによって表わされる状態は，その物理量の観測値が一意的に決まるという意味で，量子系において例外的な状態であることがわかる．

任意の状態 $\Phi \in \mathsf{H}$ に対して，Φ によって生成される 1 次元部分空間 $\{\alpha\Phi | \alpha \in \mathbb{C}\}$ への射影演算子を P_Φ とする．これは物理量であると仮定する．容易にわかるように，$\dim \mathsf{H} \geq 2$ ならば，

$$\sigma(P_\Phi) = \sigma_{\mathrm{p}}(P_\Phi) = \{0, 1\} \tag{3.4}$$

であり，$P_\Phi\Phi = \Phi$ であるから，P_Φ は，量子系の状態が Φ であるか否かを決める物理量を表わすと解釈される．P_Φ のスペクトル測度 E_{P_Φ} は，$\mathrm{supp}\, E_{P_\Phi} = \sigma(P_\Phi) = \{0, 1\}$ であるから，任意の $J \in \mathsf{B}^1$ に対して，

$$E_{P_\Phi}(J) = \begin{cases} I - P_\Phi & ; \{0,1\} \cap J = \{0\} \text{ のとき} \\ P_\Phi & ; \{0,1\} \cap J = \{1\} \text{ のとき} \\ I & ; \{0,1\} \cap J = \{0,1\} \text{ のとき} \\ 0 & ; \{0,1\} \cap J = \emptyset \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.5}$$

によってあたえられる（例 2.21 を参照）．これから，状態 Ψ において，P_Φ の観測値が 1 である確率，言い換えれば，状態 Φ を見いだす確率は

$$\frac{\|E_{P_\Phi}(\{1\})\Psi\|^2}{\|\Psi\|^2} = \frac{\|P_\Phi \Psi\|^2}{\|\Psi\|^2} = \frac{|\langle \Phi, \Psi\rangle|^2}{\|\Phi\|^2\|\Psi\|^2}$$

である．Φ は，P_Φ の固有値 1 に属する固有ベクトルであるから，公理 QM3(iii) によって，$P(\Phi, \Psi) := |\langle \Phi, \Psi\rangle|^2/(\|\Phi\|^2\|\Psi\|^2)$ は，量子系が状態 Ψ にあるとき，それが観測によって状態 Φ に遷移する確率を表わすと解釈される．この意味で，$P(\Phi, \Psi)$ を状態 Ψ と Φ との間の**遷移確率** (transition probability) とよぶ．これに対応して，$a(\Phi, \Psi) := \langle \Phi, \Psi\rangle/(\|\Phi\|\,\|\Psi\|)$ を状態 Φ と Ψ との間の**遷移確率振幅** (transition probability amplitude) という（$P(\Phi, \Psi) = |a(\Phi, \Psi)|^2$）．

状態の遷移に関して補足的な説明をしておこう．H の状態ベクトル $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \cdots$，に対して，それらの一次結合 $\sum_{n\geq 1} \alpha_n \Psi_n$ ($\alpha_n \in \mathbb{C}$)（和が可算無限個の場合は収束するとする）を状態ベクトル $\Psi_1, \Psi_2, \cdots$，の重ね合わせということはすでに述べた．ヒルベルト空間の任意のベクトルは，正射影定理を繰り返し用いることにより，互いに直交するベクトルの一次結合で表わされうる．しかも，ヒルベルト空間の次元が 2 以上であれば，ひとつのベクトルをそのような一次結合によって表わす仕方は無数にある．したがって，量子系の状態ベクトルというのは，一般には，いろいろな状態ベクトルが重ね合わさった状態であるとみることができる．この意味で，量子系の状態はいろいろな状態を“部分的に含んでいる”．それゆえ，量子系の状態がベクトル Φ によって表わされる状態であるか否かを決める観測を行なったとき，状態 Φ を見いだす確率を問うことは意味があるのである．

物理量 A と二つの状態 $\Psi \in \mathsf{D}(A), \Phi \in \mathsf{H}$ に対して，$\langle \Phi, A\Psi \rangle$ を A に関する Φ と Ψ の間の**行列要素** (matrix element) という．

さて，A を観測することによって得られる観測値の全体と A のスペクトルの関係がどうなっているかを調べよう．ボレル集合 $J \in \mathsf{B}^1$ について，$P^{X(A,\Psi)}(J) = 0$ が成り立つならば，状態 Ψ における，物理量 A の観測値は J の中には入らないと解釈される．言い換えれば，状態 Ψ においては，J に属する値は観測されないということである．ところで，任意の状態における，A の観測値の全体が理論的には閉集合であると考えるのは自然である．そこで，$P^{X(A,\Psi)}(J) = 1$ をみたす最小の閉集合 J を，状態 Ψ における，物理量 A の観測の実現値の全体として定義し，これを $\sigma_{\rm ob}(A;\Psi)$ と記す．したがって，$P^{X(A,\Psi)}(\sigma_{\rm ob}(A;\Psi)) = 1$．このとき，考察下における系の状態ベクトルから生成される部分空間を $\mathsf{D}_{\rm phys}$ として，

$$\sigma_{\rm ob}(A) := \overline{\cup_{\Psi \in \mathsf{D}_{\rm phys}} \sigma_{\rm ob}(A;\Psi)}$$

を A の**観測の実現値の全体**と定義するのは自然である．これと A のスペクトルの関係は次の命題によってあたえられる．

命題 3.3 $\mathsf{D}_{\rm phy}$ は稠密であると仮定する．このとき，任意の物理量 A に対して，$\sigma_{\rm ob}(A) = \sigma(A)$ が成立する．

証明　この証明の要点は，自己共役演算子のスペクトルとスペクトル測度の台は等しいという定理（2 章，2.9.5 項）を応用することにある．公理 QM3(ii) によって，$S_\Psi := \sigma_{\mathrm{ob}}(A;\Psi)$ とおけば，これは測度 $\mu_\Psi^A(\cdot) := \|E_A(\cdot)\Psi\|/\|\Psi\|^2$ の台に等しい: $S_\Psi = \mathrm{supp}\,\mu_\Psi^A$．明らかに，$\mathrm{supp}\,\mu_\Psi^A \subset \mathrm{supp}\,E_A = \sigma(A)$．したがって，$S_\Psi \subset \sigma(A)$．ゆえに，$\sigma_{\mathrm{ob}}(A) \subset \sigma(A)$．逆の包含関係を示すために，任意の $\Psi \in \mathsf{D}_{\mathrm{phys}}$ に対して（$S_\Psi \subset \sigma_{\mathrm{ob}}(A)$ であるから），$E_A(S_\Psi) \leq E_A(\sigma_{\mathrm{ob}}(A))$ に注意する．S_Ψ の定義によって，$\langle\Psi, E_A(S_\Psi)\Psi\rangle = \|\Psi\|^2$．したがって，$\|\Psi\|^2 \leq \langle\Psi, E_A(\sigma_{\mathrm{ob}}(A))\Psi\rangle$．右辺は $\|\Psi\|^2$ 以下であるから，結局，$\langle\Psi, E_A(\sigma_{\mathrm{ob}}(A)\Psi\rangle = \|\Psi\|^2$．これは，$\|(E_A(\sigma_{\mathrm{ob}}(A)) - I)\Psi\|^2 = 0$，したがって，$(E_A(\sigma_{\mathrm{ob}})(A) - I)\Psi = 0$ を意味する．これがすべての $\Psi \in \mathsf{D}_{\mathrm{phys}}$ に対して成立し，$\mathsf{D}_{\mathrm{phys}}$ は稠密であるから，演算子の等式 $E_A(\sigma_{\mathrm{ob}}(A)) = I$ を得る．したがって，$\sigma_{\mathrm{ob}}(A) \supset \mathrm{supp}\,E_A = \sigma(A)$．よって求める結果が得られる．

命題 3.3—通常は公理として設定される— は自己共役演算子のスペクトルの物理的意味を確立する．

注意　命題 3.3 の仮定はほとんどの場合みたされる．

3.1.5　不確定性関係

公理 QM3 は単独の物理量の観測に関するものであるが，通常の量子系には複数の物理量が存在しうる．そこで，次に，複数の物理量の観測に関する公理を定式化しよう．そのために，まず予備的な考察を行なう．

古典力学の場合，物理量の観測は，原理的にはいくらでも正確にできる．しかも，この場合，同時に測定する物理量の数は複数であってもよい．観測の誤差は，観測する装置に付随する技術的な理由から生じるにすぎないとされる．量子力学の場合はどうなるであろうか．

命題 3.1 によれば，状態のヒルベルト空間 H 上の自己共役演算子 A によって表わされる物理量があたえられたとき，状態 $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ において，それを観測した場合の平均値は

$$E_\Psi(A) := \frac{\langle\Psi, A\Psi\rangle}{\|\Psi\|^2} \tag{3.6}$$

であたえられる．状態 Ψ における，A の平均値からのゆらぎのひとつの尺度として，観測確率変数 $X(A,\Psi)$ の標準偏差をとるのは自然である．これを $(\Delta A)_\Psi$ としよう：

$$
\begin{aligned}
(\Delta A)_\Psi &:= \sqrt{E[(X(A,\Psi)-E_\Psi(A))^2]} \\
&= \sqrt{\int_{\mathbb{R}}[\lambda - E_\Psi(A)]^2\, dP^{X(A,\Psi)}(\lambda)}. \qquad (3.7a)
\end{aligned}
$$

ここで，第 2 の等号を得るのに付録 A の (A.30) を応用した．$(\Delta A)_\Psi$ を状態 Ψ における A の**不確定さ**とよぶ．(3.1) と演算子解析により，

$$
(\Delta A)_\Psi = \frac{\|[A - E_\Psi(A)]\Psi\|}{\|\Psi\|} \qquad (3.7b)
$$

が得られる．

特別な場合として，Ψ が A の固有状態，すなわち，Ψ が A の固有ベクトルであれば，$(\Delta A)_\Psi = 0$ である．この逆も成り立つ．つまり，A の固有状態では，A は不確定性をもたない．これは命題 3.2(ii) から当然であるともいえる．

できるだけ一般的に数学的な理論を展開するためには，自己共役演算子とは限らない演算子に対しても，平均値（期待値ともよぶ）や不確定さの概念を導入しておくと便利である．そこで，H 上の任意の演算子 A に対して，(3.6)，(3.7b) によって，それぞれ，ベクトル $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ に関する A の平均値，不確定さを定義する．

ヒルベルト空間 H 上の二つの演算子 A, B に対し，演算子 $[A,B]$ を

$$
\begin{aligned}
\mathsf{D}([A,B]) &:= \mathsf{D}(AB) \cap \mathsf{D}(BA) \qquad (3.8a) \\
[A,B]\Psi &:= (AB - BA)\Psi, \quad \Psi \in \mathsf{D}([A,B]), \qquad (3.8b)
\end{aligned}
$$

によって定義し，これを A と B の**交換子** (commutator) とよぶ．

また，

$$
\begin{aligned}
\mathsf{D}(\{A,B\}) &:= \mathsf{D}(AB) \cap \mathsf{D}(BA) \qquad (3.9a) \\
\{A,B\}\Psi &:= (AB + BA)\Psi, \quad \Psi \in \mathsf{D}(\{A,B\}), \qquad (3.9b)
\end{aligned}
$$

によって定義される演算子 $\{A,B\}$ を A と B の**反交換子** (anti-commutator) とよぶ．

部分空間 $\mathsf{D} \subset \mathsf{D}(AB) \cap \mathsf{D}(BA)$ が存在して，任意の $\Psi \in \mathsf{D}$ に対して，$[A,B]\Psi = 0$ が成り立つとき，**A と B は D 上で可換** (commuting) であるという．また，任意の $\Psi \in \mathsf{D}$ に対して，$\{A,B\}\Psi = 0$ が成り立つとき，**A と B は D 上で反可換** (anti-commuting) であるという．特に，A と B が $\mathsf{D}(AB) \cap \mathsf{D}(BA)$ 上で可換のとき，A と B は可換であるという．同様に，A と B が $\mathsf{D}(AB) \cap \mathsf{D}(BA)$ 上で反可換のとき，A と B は反可換であるという．

演算子 A, B が有界であれば，$[A,B]$ と $\{A,B\}$ は H 全体で定義された有界演算子である．しかし，そうでない場合は，A, B が稠密に定義されていても，$[A,B]$ または $\{A,B\}$ は必ずしもそうではないし，$\mathsf{D}([A,B]) = \mathsf{D}(\{A,B\}) = \{0\}$ となる場合さえもありうる*12．

一般に，H 上の演算子 A, B, C に対して，部分空間 $\mathsf{D} \subset \mathsf{D}(AB) \cap \mathsf{D}(BA) \cap \mathsf{D}(C)$ があって，任意の $\Psi \in \mathsf{D}$ に対して交換関係 $[A,B]\Psi = C\Psi$ が成り立つとき，A, B, C は D 上で交換関係 $[A,B] = C$ をみたすという．

同様に，任意の $\Psi \in \mathsf{D}$ に対して反交換関係 $\{A,B\}\Psi = C\Psi$ が成り立つとき，A, B, C は D 上で反交換関係 $\{A,B\} = C$ をみたすという．

さて，以上の概念的準備のもとで，二つのエルミート演算子 A, B の不確定さに対する関係を導こう．

補題 3.4　A, B を H 上のエルミート演算子（必ずしも自己共役である必要はない）とし，$\Psi \in \mathsf{D}(AB) \cap \mathsf{D}(BA)$ とする．このとき，不等式

$$\|A\Psi\| \, \|B\Psi\| \geq \frac{1}{2} \max\{|\langle \Psi, [A,B]\Psi \rangle|, \ |\langle \Psi, \{A,B\}\Psi \rangle|\} \qquad (3.10)$$

が成り立つ．

*12 たとえば，F を $\mathbb{R}$ 上のいたるところ微分可能でない実数値連続関数として，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ 上で，$A := M_F$ (関数 F によるかけ算演算子), $B := d/dx$, $\mathsf{D}(B) = \mathsf{C}_0^1(\mathbb{R})$, を考えると，$\mathsf{D}(AB) \cap \mathsf{D}(BA) = \{0\}$．

証明 シュヴァルツの不等式により,

$$\begin{aligned}\|A\Psi\|\,\|B\Psi\| &\geq |\langle A\Psi, B\Psi\rangle| \geq |\mathrm{Re}\,\langle A\Psi, B\Psi\rangle| \\ &= \frac{1}{2}|\langle \Psi, \{A, B\}\Psi\rangle|.\end{aligned}$$

同様に,

$$\|A\Psi\|\,\|B\Psi\| \geq |\mathrm{Im}\,\langle A\Psi, B\Psi\rangle| = \frac{1}{2}|\langle \Psi, [A, B]\Psi\rangle|.$$

したがって, (3.10) が得られる. □

定理 3.5 A, B をエルミート演算子とする. このとき, 任意の $\Psi \in \mathsf{D}(AB) \cap \mathsf{D}(BA)$ に対して,

$$(\Delta A)_\Psi (\Delta B)_\Psi \geq \frac{1}{2}\max\left\{\frac{|\langle \Psi, [A, B]\Psi\rangle|}{\|\Psi\|^2},\ \left|\frac{\langle \Psi, \{A, B\}\Psi\rangle}{\|\Psi\|^2} - 2E_\Psi(A)E_\Psi(B)\right|\right\} \quad (3.11)$$

が成り立つ. 特に,

$$(\Delta A)_\Psi (\Delta B)_\Psi \geq \frac{1}{2}\frac{|\langle \Psi, [A, B]\Psi\rangle|}{\|\Psi\|^2}. \quad (3.12)$$

証明 補題 3.4 における A, B として, それぞれ, $A - E_\Psi(A)$, $B - E_\Psi(B)$ をとり,

$$\begin{aligned}[A - E_\Psi(A), B - E_\Psi(B)] &= [A, B], \\ \langle \Psi, \{A - E_\Psi(A), B - E_\Psi(B)\}\Psi\rangle &= \langle \Psi, \{A, B\}\Psi\rangle - 2E_\Psi(A)E_\Psi(B)\|\Psi\|^2,\end{aligned}$$

であることに注意すればよい. □

上の定理の (3.12) から次の結果が得られる.

系 3.6 A, B を定理 3.5 のものとする. 複素定数 $\gamma \neq 0$ と部分空間 $\mathsf{D} \subset \mathsf{D}(AB) \cap \mathsf{D}(BA)$ が存在して, D 上で

$$[A, B] = \gamma I \quad (3.13)$$

ならば，任意の $\Psi \in \mathsf{D}$ に対して，

$$(\Delta A)_\Psi (\Delta B)_\Psi \geq \frac{|\gamma|}{2}. \tag{3.14}$$

不等式 (3.14) は**ハイゼンベルクの不確定性関係** (Heisenberg's uncertainty relation) とよばれる．これに対して，(3.12) は**一般化された，ハイゼンベルク** (Heisenberg) **の不確定性関係**とでもよばれるべきものである．

(3.14) は，A, B が (3.13) をみたす物理量であるとき（したがって，A と B は非可換），D に属する任意の状態 Ψ に対して，A と B の不確定さの積は一定の限界 $|\gamma|/2$ より小さくなり得ないということを示している．したがって，物理量 A の不確定さ $(\Delta A)_\Psi$ を小さくしようとすれば，物理量 B の不確定さ $(\Delta B)_\Psi$ は大きくならざるを得ないし，その逆も同様である．このことから，物理量 A の観測値が一定の値に十分精度よく確定されるような状態においては，物理量 B の観測値についてはほとんど確定され得ないことが結論される．A と B の役割を交換しても同様である．ゆえに，(3.13) をみたす物理量の対 (A, B) に関しては，これらの同時観測（物理量 A, B を，同一の状態で観測すること）における観測値の精度には原理的な限界がある．このことを具体的に述べれば次のようになる．状態 $\Psi \in \mathsf{D}$ を A, B の観測値がそれぞれ，$\delta_A(\Psi)$, $\delta_B(\Psi) > 0$ の精度内で確定するような状態であるとしよう．すなわち，$(\Delta A)_\Psi \leq \delta_A(\Psi)$, $(\Delta B)_\Psi \leq \delta_B(\Psi)$ がみたされるとする．このとき，(3.14) によって，$\delta_A(\Psi)\delta_B(\Psi) \geq |\gamma|/2$ でなければならない．したがって，$\delta_A(\Psi)\delta_B(\Psi) < |\gamma|/2$ をみたす精度で A, B の観測値が得られるような状態の存在は不可能であることが導かれる．特に，$0 < \varepsilon < \sqrt{|\gamma|/2}$ のとき，$\delta_A(\Psi) < \varepsilon$, $\delta_B(\Psi) < \varepsilon$ をみたす状態 Ψ は存在しえない．これは，(3.13) をみたす物理量の対 (A, B) に対しては，これらの両方が十分小さい精度で観測されるような状態は存在しないことを意味する．この意味で，A, B の同時観測には限界がある．同様の考察が反可換でない物理量についてもあてはまる．こうして，量子力学が古典力学と本質的に異なる点のひとつが明らかにされる．ここで，物理量どうしの非可換性あるいは非反可換性が重要な役割を演じていることに注意しよう．

3.1.6 複数の物理量の観測に関する公理

前項の結果によって，量子系における複数の物理量の同時観測に関してはある種の制限があることが示された．すでに注意したように，これは物理量の非可換性あるいは非反可換性に由来するものである．そこで，可換な物理量の場合はどうかと問うのは自然である．だが，非有界な演算子の場合，可換性の概念は一義的に決まらない．実は，前項で定義した意味での可換性の概念は，非有界演算子の場合，ほとんど役に立たない．有用なのは，次に定義する強い意味での可換性の概念である：

定義 3.7 A, B を H 上の自己共役演算子とし，それぞれのスペクトル測度を E_A, E_B とする．もし，E_A と E_B が可換，すなわち，すべての $J, K \in \mathsf{B}^1$ に対して，$E_A(J)E_B(K) = E_B(K)E_A(J)$ が成立するならば，A と B は**強可換** (strongly commuting) であるという．n 個の自己共役演算子 $A_1, \cdots, A_n$ は，この中の任意の 2 個が強可換であるとき，強可換であるという．

例 3.2 $(x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ とし，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上の x_j によるかけ算演算子を $\hat{x}_j$ で表わす．これは自己共役演算子である（例 2.13 を参照)．このとき，任意の $j, k = 1, \cdots, d$ に対して，$\hat{x}_j$ と $\hat{x}_k$ は強可換である．実際，$\hat{x}_j$ のスペクトル測度を E_j とすれば，例 2.24 と同様にして，

$$(E_j(B)f)(x) = \chi_B(x_j)f(x), \quad B \in \mathsf{B}^1,\ f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d),$$

が成立することがわかる．これから，E_j と E_k が可換となることは容易にわかる．

$E_1, \cdots, E_d$ の直積スペクトル測度 $E_1 \otimes \cdots \otimes E_d$ を求めてみよう (定理 2.67 を参照)．任意のボレル集合 $B_1, \cdots, B_d \in \mathsf{B}^d$ に対して，

$$\begin{aligned} E_1 \otimes \cdots \otimes E_d(B_1 \times \cdots \times B_d)f &= E_1(B_1) \cdots E_d(B_d)f \\ &= \chi_{B_1 \times \cdots \times B_d} f \\ &= E(B_1 \times \cdots \times B_d)f. \end{aligned}$$

ただし，E は例 2.22 のスペクトル測度である．直積スペクトル測度の存在の一

意性により，$E_1 \otimes \cdots \otimes E_d = E$ でなければならない．したがって，

$$(E_1 \otimes \cdots \otimes E_d(B)f)(x) = \chi_B(x)f(x), \quad f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d),\ B \in \mathsf{B}^d.$$

定義 3.7 に関連して，若干の注意を述べておこう．A, B が自己共役で強可換ならば，可換であることが示される（3.2 節を参照）．だが，A, B がともに非有界の場合，この逆は一般には成立しない．したがって，強可換性の概念は単なる可換性の概念よりも強い．A, B がともに有界な自己共役演算子ならば，A, B が強可換であることと可換であることは同値になる（3.2 節を参照）．

強可換性の概念を用いることにより，複数の物理量の観測に関する公理を次のように定式化できる：

公理 QM4　物理量 $A_1, \cdots, A_n$ は強可換であるとする（したがって，直積スペクトル測度 $E_{A_1} \otimes \cdots \otimes E_{A_n}$ が定義される；定理 2.67 を参照）．状態 Ψ において，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ の同時観測を行なう際に得られる A_j の観測値を λ_j とする（$j = 1, \cdots, n$）．このとき，任意の n 次元ボレル集合 $K \in \mathsf{B}^n$ に対して，$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in K$ である確率は，$\|E_{A_1} \otimes \cdots \otimes E_{A_n}(K)\Psi\|^2/\|\Psi\|^2$ に等しい．

注意　強可換な物理量の組 $\mathbf{A} := (A_1, \cdots, A_n)$ の同時観測の場合には，それらの観測値の組 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ は n 次元の確率ベクトルの実現値であると考えられる[*13]．この確率ベクトルを

$$\mathbf{X}(\mathbf{A}; \Psi) := (X_1(\mathbf{A}; \Psi), X_2(\mathbf{A}; \Psi), \cdots, X_n(\mathbf{A}; \Psi))$$

とし，その同時分布を $P^{\mathbf{X}(\mathbf{A};\Psi)}$ とすれば，上の公理 QM4 は，

$$P^{\mathbf{X}(\mathbf{A};\Psi)}(K) = \frac{\|E_{A_1} \otimes \cdots \otimes E_{A_n}(K)\Psi\|^2}{\|\Psi\|^2}, \quad K \in \mathsf{B}^n,$$

ということと同等である．もちろん，$n = 1$ の場合は，$\mathbf{X}(\mathbf{A}; \Psi)$ は A_1 の観測確率変数である．確率ベクトル $\mathbf{X}(\mathbf{A}; \Psi)$ は**同時観測確率変数**とでもよぶべきものである．

3.2　自己共役演算子の強可換性

前節で見たように，量子系における複数の物理量の同時観測に関する公理を定式化するのに自己共役演算子に対する強可換性の概念が導入された．この概

[*13] 確率ベクトルについては，付録 A.8 を参照．

念は理論上極めて重要であるので，これについて，ここで，もう少し議論しておくことにする．目的は，強可換性と同値な条件を導くことである．だが，そのためには少し準備が必要である．以下，H をヒルベルト空間とする．

D を $\mathbb{C}$ の空でない部分集合とする．D の各元 z に対して，H 上の有界演算子 $T(z)$ をひとつ定める対応 $T : z \to T(z) \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$ を D 上の $\mathfrak{B}(\mathsf{H})$-**値関数**という．

たとえば，A を，$\varrho(A) \neq \emptyset$ をみたす，H 上の演算子とすれば，対応 $z \to R_z(A), z \in \varrho(A),$ は $\varrho(A)$ 上の $\mathfrak{B}(\mathsf{H})$-値関数である．

T を D 上の $\mathfrak{B}(\mathsf{H})$-値関数とし，D は開集合であるとする．D の点 z_0 に対して，$\lim_{z\to z_0}\|T(z) - T(z_0)\| = 0$ が成り立つとき，T は $z = z_0$ で**連続**であるという．T が D のすべての点で連続のとき，単に T は連続であるという．

補題 3.8　A を H 上の閉演算子で $\varrho(A) \neq \emptyset$ をみたすとする．このとき，$\mathfrak{B}(\mathsf{H})$-値関数 : $z \to R_z(A), z \in \varrho(A),$ は連続である．

注意　定理 2.20 によって，$\varrho(A)$ は $\mathbb{C}$ の開集合である．

証明　$z_0 \in \varrho(A)$ とすれば，定理 2.20 によって，$|z - z_0| < \delta < 1/\|R_{z_0}(A)\|$ ならば (δ は定数)，$z \in \varrho(A)$ であり，

$$\begin{aligned}\|R_z(A)\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|R_{z_0}(A)\|^{n+1}|z - z_0|^n \\ &= \frac{\|R_{z_0}(A)\|}{1 - |z - z_0|\,\|R_{z_0}(A)\|} \\ &\leq \frac{\|R_{z_0}(A)\|}{1 - \delta\|R_{z_0}(A)\|}.\end{aligned}$$

第 1 レゾルヴェント公式 (2.42) によって，

$$\begin{aligned}\|R_z(A) - R_{z_0}(A)\| &= |z - z_0|\,\|R_z(A)\|\,\|R_{z_0}(A)\| \\ &\leq |z - z_0|\frac{\|R_{z_0}(A)\|^2}{1 - \delta\|R_{z_0}(A)\|}, \quad |z - z_0| < \delta.\end{aligned}$$

したがって，$\lim_{z\to z_0}\|R_z(A) - R_{z_0}(A)\| = 0$．$z_0$ は $\varrho(A)$ の任意の点でよかったから，題意が示されたことになる．　□

T を $\mathbb{C}$ の開集合 D 上の $\mathfrak{B}(\mathsf{H})$-値連続関数とする．この種の関数に対しても，通常の連続関数の場合と同様にリーマン積分が定義される．いま，D が $\mathbb{R}$ の閉区間 $[a,b]$ を含む場合を考え，この区間に関する T の積分を定義しよう．まず，$[a,b]$ に対する (2.84) の分割 Π を考え，リーマン近似和

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} T(\xi_k)(\lambda_k - \lambda_{k-1})$$

をつくる $(\lambda_{k-1} < \xi_k \leq \lambda_k)$．このとき，通常の連続関数に関するリーマン積分の定義の場合と同様にして，$\{S_n\}_n$ は，$|\Pi| \to 0$ の極限に関して，$\mathfrak{B}(\mathsf{H})$ のコーシー列をなすことが示される[*14]．したがって，S_n は $\mathfrak{B}(\mathsf{H})$ の元に収束する．そこで，

$$\int_a^b T(\lambda)d\lambda := \lim_{n\to\infty} S_n$$

と定義し，これを区間 $[a,b]$ における，$T(\lambda)$ の**リーマン積分**とよぶ．区間が無限区間または半無限区間の場合は，有限区間のリーマン積分の極限として定義する（ただし，その極限が存在する場合のみ）．たとえば，

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(\lambda)d\lambda := \lim_{b\to\infty, a\to-\infty} \int_a^b T(\lambda)d\lambda.$$

$\mathbb{C}$ 内の閉曲線に関する，$T(\lambda)$ のリーマン線積分も同様に定義される．

補題 3.9　A を H 上の自己共役演算子とする．f_n，f $(n = 1, 2, \cdots)$ を $\mathbb{R}$ 上の有界なボレル可測関数で，

$$C := \sup_{n\geq 1}(\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} |f_n(\lambda)|) < \infty,$$
$$\lim_{n\to\infty} f_n(\lambda) = f(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R},$$

が成立するとする．このとき，

$$\text{s-}\lim_{n\to\infty} f_n(A) = f(A).$$

[*14] 通常の連続関数に対するリーマン近似和の収束性の証明において，絶対値をとるところを演算子のノルムに置き換えて考察すればよい．

注意　$f_n(A)$, $f(A)$ はスペクトル定理を介して定義される有界演算子である（2.10 節を参照）.

証明　E を A のスペクトル測度とすれば，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\|[f_n(A) - f(A)]\Psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f_n(\lambda) - f(\lambda)|^2 d\langle \Psi, E(\lambda)\Psi \rangle.$$

$|f_n(\lambda) - f(\lambda)|^2 \leq 2(C^2 + M^2)$ $(M := \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} |f(\lambda)|)$ であり，$\lim_{n\to\infty} |f_n(\lambda) - f(\lambda)|^2 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$ であるから，ルベーグの優収束定理によって，上式の右辺は，$n \to \infty$ とすれば，0 に収束する．したがって，求める結果が得られる．□

次に述べるのは，自己共役演算子のスペクトル測度がもとの自己共役演算子からどのようにして復元されるかを示す重要な定理である：

定理 3.10　ストーン (M. Stone) の公式． A を H 上の自己共役演算子，E_A をそのスペクトル測度とする．このとき，任意の a, b, $a < b$, に対して

$$\text{s-}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\pi i}\int_a^b [R_{\lambda+i\varepsilon}(A) - R_{\lambda-i\varepsilon}(A)]\, d\lambda = \frac{1}{2}[E_A([a,b]) + E_A((a,b))]. \tag{3.15}$$

左辺の積分は上に定義した意味でのリーマン積分である（これは補題 3.8 のおかげで定義される）.「s- lim」は演算子の強収束を表わす（1 章，1.2 節，1.2.5 項を参照）.

証明　各 $\varepsilon > 0$ に対して，$\mathbb{R}$ 上の関数 f_ε を

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \left(\frac{1}{x-\lambda-i\varepsilon} - \frac{1}{x-\lambda+i\varepsilon}\right) d\lambda$$

によって定義する．このとき，

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\int_{a-x}^{b-x} \frac{\varepsilon}{\lambda^2+\varepsilon^2} d\lambda. \tag{3.16}$$

したがって，

$$|f_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{\lambda^2+\varepsilon^2} d\lambda = 1.$$

すなわち，$f_\varepsilon(x)$ は ε に関して一様有界である．自然数 n に対して，

$$\Sigma_n(x) := \frac{1}{2\pi i}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x-(a+\frac{b-a}{n}k)-i\varepsilon} - \frac{1}{x-(a+\frac{b-a}{n}k)+i\varepsilon}\right)$$

とすれば，リーマン積分の定義によって，

$$\lim_{n\to\infty}\Sigma_n(x) = f_\varepsilon(x).$$

容易にわかるように，$|\Sigma_n(x)| \leq (b-a)/(\pi\varepsilon)$．したがって，補題 3.9 によって，

$$\text{s-}\lim_{n\to\infty}\Sigma_n(A) = f_\varepsilon(A).$$

一方，定理 2.83(iii) によって，

$$\Sigma_n(A) = \frac{1}{2\pi i}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(R_{a+(b-a)kn^{-1}+i\varepsilon}(A) - R_{a+(b-a)kn^{-1}-i\varepsilon}(A)\right)$$

であり，これは，$n\to\infty$ のとき，演算子のノルムの意味で

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b (R_{\lambda+i\varepsilon}(A) - R_{\lambda-i\varepsilon}(A))d\lambda$$

に収束する．したがって，それは強収束もするので，

$$f_\varepsilon(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b (R_{\lambda+i\varepsilon}(A) - R_{\lambda-i\varepsilon}(A))d\lambda$$

を得る．表示 (3.16) を用いると，

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} f_\varepsilon(x) &= \begin{cases} 0 & ; x \notin [a,b] \\ \frac{1}{2} & ; x = a \text{ または } x = b \\ 1 & ; x \in (a,b) \end{cases} \\ &= \frac{1}{2}[\chi_{[a,b]}(x) + \chi_{(a,b)}(x)]\end{aligned}$$

であることがわかる．ふたたび，補題 3.9 を応用すれば，

$$\text{s-}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} f_\varepsilon(A) = \frac{1}{2}[E_A([a,b]) + E_A((a,b))].$$

ゆえに，(3.15) が得られる． □

いま証明したストーンの公式は，自己共役演算子 A のスペクトル測度が A から一意的に定まる構造に対するひとつの表現をあたえる（以下の等式 (3.19) を参照）.

H 上の自己共役演算子 A と実数 t に対して，$\mathbb{R}$ 上の指数関数 $e^{it\lambda}, \lambda \in \mathbb{R}$, から決まる演算子を e^{itA} と記す:

$$e^{itA} := \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} dE_A(\lambda). \tag{3.17}$$

$|e^{it\lambda}| = 1$ であるから，e^{itA} はユニタリである（定理 2.71(viii)）.

次の補題は，自己共役演算子 A のレゾルヴェント $R_z(A)$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ は $e^{\pm itA}$ の "ラプラス変換"によって表わされることを示す.

補題 3.11 A を H の自己共役演算子とする．このとき，任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に対して，

$$R_z(A) = \begin{cases} i\displaystyle\int_0^\infty e^{-it(A-z)}dt & ;\mathrm{Im}\, z > 0 \text{のとき} \\ -i\displaystyle\int_0^\infty e^{it(A-z)}dt & ;\mathrm{Im}\, z < 0 \text{のとき} \end{cases} \tag{3.18}$$

証明 $z = a + ib,\ b \neq 0$, とおく．まず，$b > 0$ の場合を考える．このとき，$\|e^{-it(A-z)}\| = e^{-tb}$ であるから，(3.18) の右辺の積分は $\mathfrak{B}(\mathsf{H})$ の中で収束する（補題 1.33 を参照）.

$$L = i\int_0^\infty e^{-it(A-z)}dt$$

とおこう．演算子の一様収束は弱収束を意味するから，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\langle \Psi, L\Psi \rangle = i\int_0^\infty \langle \Psi, e^{-it(A-z)}\Psi \rangle dt.$$

一方，E_A を A のスペクトル測度とすれば，演算子解析により，

$$\langle \Psi, e^{-it(A-z)}\Psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-it(\lambda-z)} d\langle \Psi, E_A(\lambda)\Psi \rangle$$

したがって，

$$\langle \Psi, L\Psi \rangle = i\int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}} e^{-it(\lambda-z)} d\langle \Psi, E_A(\lambda)\Psi \rangle.$$

右辺の被積分関数に関して，$|e^{-it(\lambda-z)}| = e^{-tb}$ であり，e^{-tb} は，明らかに，$[0,\infty) \times \mathbb{R}$ 上の直積測度 $dt \otimes d\langle\Psi, E(\lambda)\Psi\rangle$ に関して可積分である．したがって，フビニの定理によって，積分の順序交換が可能であり，

$$\begin{aligned}\langle\Psi, L\Psi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^\infty ie^{-it(\lambda-z)}dt \right) d\langle\Psi, E_A(\lambda)\Psi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\lambda - z)^{-1} d\langle\Psi, E_A(\lambda)\Psi\rangle \\ &= \langle\Psi, R_z(A)\Psi\rangle.\end{aligned}$$

ここで，最後の等号は，定理 2.83(iii) による．この結果と偏極恒等式を使えば，$L = R_z(A)$，すなわち，(3.18) の第一の式が得られる．第二式についても同様．　□

補題 3.12　A, B を H 上の強可換な自己共役演算子，f, g を $\mathbb{R}$ 上のボレル可測関数とし，f は有界であるとする．このとき，$f(A)g(B) \subset g(B)f(A)$．特に，$g$ も有界であれば，$f(A)$ と $g(B)$ は可換である．

注意　演算子解析により，$f(A)$ は有界演算子である．

証明　B のスペクトル測度を E_B とすれば，A, B の強可換性と $f(A)$ の有界性，および定理 2.73 によって，$E_B f(A) = f(A)E_B$．そこで，ふたたび，定理 2.73 を応用すれば，$f(A)g(B) \subset g(B)f(A)$ を得る．　□

補題 3.12 は，量子力学の文脈では，A, B が強可換な物理量であれば，それぞれの物理量からつくられる有界な物理量はそれぞれ可換であることを示している．

定理 3.13　A, B を自己共役演算子とする．このとき，次の条件 (i)～(iii) は同値である．

(i)　A と B は強可換である．

(ii)　すべての $s, t \in \mathbb{R}$ に対して，e^{itA} と e^{isB} は可換，すなわち，

$$e^{itA}e^{isB} = e^{isB}e^{itA}.$$

(iii)　すべての $z, w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に対して，$R_z(A)$ と $R_w(B)$ は可換，すなわち，

$$R_z(A)R_w(B) = R_w(B)R_z(A).$$

証明 (i)$\Longrightarrow$(ii): 補題 3.12 を $f(\lambda) = e^{it\lambda}, g(\lambda) = e^{is\lambda}$ として応用すればよい．

(ii)$\Longrightarrow$(iii): これは，補題 3.11 から導かれる．

(iii)$\Longrightarrow$(i): (3.15) の左辺の演算子を $T_A(a,b)$ とおく．いまの仮定は，任意の $a, b, c, d,\ a < b, c < d,$ に対して，$T_A(a,b)$ と $T_B(c,d)$ が可換であることを意味する．一方，

$$T_A(a,b)^2 = \frac{1}{4}[E_A([a,b]) + 3E((a,b))].$$

したがって，

$$E_A((a,b)) = 2T_A(a,b)^2 - T_A(a,b).$$

また，

$$T_A(a) := \text{s-}\lim_{\delta\to+0} T_A(a, a+\delta) = \frac{1}{2}E(\{a\})$$

であるから，

$$E_A((a,b]) = 2T_A(a,b)^2 - T_A(a,b) + 2T_A(b). \tag{3.19}$$

$E_B((c,d])$ についても同様であるから，

$$E_A((a,b])E_B((c,d]) = E_B((c,d])E_A((a,b])$$

が得られる．1 次元ボレル集合体 B^1 は，半区間によって生成される最小のボレル集合体であるから，測度 $\langle\Psi, E_A(\cdot)\Psi\rangle$ $(\Psi \in \mathsf{H})$ の拡大の一意性を使えば，$E_A(J)E_B(K) = E_B(K)E_A(J)$ が得られる（定理 2.64 の証明を参照）．すなわち，A と B は強可換である． □

自己共役演算子の強可換性については，次のような特徴づけもできる：

定理 3.14 A, B を自己共役演算子とする．このとき，次の条件 (i)〜(iii) は同値である．

(i) A と B は強可換である．

(ii)　すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して，$e^{itA}B \subset Be^{itA}$.

(iii)　すべての $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に対して，$R_z(A)B \subset BR_z(A)$.

証明　(i)$\Longrightarrow$(ii): 補題 3.12 を $f(\lambda) = e^{it\lambda}$, $g(\lambda) = \lambda$ として応用すればよい.

(ii)$\Longrightarrow$(iii): (ii) を仮定すると，任意の $\Psi, \Phi \in \mathsf{D}(B)$ に対して，$\langle \Psi, e^{itA}B\Phi \rangle = \langle B\Psi, e^{itA}\Phi \rangle$. これと補題 3.11 は，$\langle \Psi, R_z(A)B\Phi \rangle = \langle B\Psi, R_z(A)\Phi \rangle$ を導く. したがって，$R_z(A)\Phi \in \mathsf{D}(B^*) = \mathsf{D}(B)$ かつ $BR_z(A)\Phi = R_z(A)B\Phi$. すなわち，$R_z(A)B \subset BR_z(A)$.

(iii)$\Longrightarrow$(i): 仮定から，任意の $\Psi \in \mathsf{D}(B)$ と $w \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ に対して，$R_z(A)(B-w)\Psi = (B-w)R_z(A)\Psi$. これと演算子 $B-w$ は全単射性を使えば，$R_w(B)R_z(A) = R_z(A)R_w(B)$ が得られる. ゆえに，定理 3.13(iii) の条件がみたされるので，A と B は強可換である. □

この節を終えるにあたって，前節の公理 QM4 の前で注意した事実の証明をあたえておこう.

定理 3.15　自己共役演算子 A, B が強可換ならば，任意の $\Psi \in \mathsf{D}(AB) \cap \mathsf{D}(A)$ に対して，$\Psi \in \mathsf{D}(BA)$ であって，$AB\Psi = BA\Psi$ が成立する. 特に，A, B は可換である.

証明　$\Psi \in \mathsf{D}(AB) \cap \mathsf{D}(A)$ とし，$\Phi = (B-z)\Psi$ とおく ($z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$). このとき，$\Phi \in \mathsf{D}(A)$. 仮定と定理 3.14(iii) により，$R_z(B)A\Phi = AR_z(B)\Phi = A\Psi$ (A と B の役割を変えて，定理 3.14(iii) を応用). したがって，$A\Psi \in \mathsf{D}(B)$ であり (すなわち，$\Psi \in \mathsf{D}(BA)$)，$A\Phi = (B-z)A\Psi$ が成り立つ. 左辺は，$A(B-z)\Psi$ であるから，$AB\Psi = BA\Psi$ を得る. □

前節でも注意したように，定理 3.15 の逆は成り立たないことに注意しよう (反例については後出の章を参照).

系 3.16　A, B を H 上の有界な自己共役演算子とする. このとき，A と B が可換であることと強可換であることは同値である.

証明　$AB = BA$ ならば，任意の $z, w \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ に対して，$(A-z)B = B(A-z)$ であるから，$R_z(A)B = BR_z(A)$ がでる. したがって，定理 3.14 によって，A

と B は強可換である．逆に，A, B が強可換であれば，定理 3.15 から，A, B は可換である．□

次の事実もしばしば有用である．

定理 3.17　A, B を H 上の自己共役演算子とし，B は有界であるとする．さらに，$BA \subset AB$ が成り立つとする．このとき，A と B は強可換である．

証明　任意の $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ に対して，$B\Psi \in \mathsf{D}(A)$ であり，$BA\Psi = AB\Psi$ が成り立つ．したがって，任意の $z, w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に対して，$(B-w)(A-z)\Psi = (A-z)(B-w)\Psi$ が成立する．これと演算子 $B-w, A-z$ の全単射性を用いると，$R_z(A)R_w(B) = R_w(B)R_z(A)$ が導かれる．ゆえに，定理 3.13(iii) によって，題意が成立する．□

3.3　正準量子化

前節までは，量子力学における状態や物理量について一般的・抽象的な形で議論してきた．次に考えなければならないのは，物理的現実として現象している個々の量子系の状態のヒルベルト空間ならびに物理量はどのように表現されうるか，という問題である．この問題に関する基本的な事柄を叙述するのがこの節の目的である．

3.3.1　有限自由度の粒子系の状態のヒルベルト空間—ひとつの例

例 3.1 において，3 次元空間を運動する N 個の（空間的自由度だけを有する）量子力学的粒子の状態空間を記述するために，ヒルベルト空間 $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{3N})$ を用いることができることを述べた．ここでは，この選択に対する物理的根拠を発見法的に示しておく．まず，簡単のため，量子力学的粒子として電子をとり，粒子的描像から見て，それが 1 個だけからなる系を考えよう[*15]．電子は 3 次元空

[*15] 実際には，電子は実験的に観測される “スピン”とよばれる特性量を担っている．これは，いわば，電子の “内部自由度”—つまり，外的（空間的）な自由度とは独立な自由度—に関する “回転”の角運動量を表わすものである．だが，ここでは，さしあたって，この自由度は考慮しないことにする．スピンについては，続編『量子物理の数理』で論じる．

間 $\mathbb{R}^3$ の中にあるものとする．すでに述べたように，真に微視的な領域では電子の位置とか軌道とかいう概念は古典的な意味では使うことはできないが，Δx を $x \in \mathbb{R}^3$ に隣合う，$\mathbb{R}^3$ の微小領域とすれば（Δx のルベーグ測度 $|\Delta x|$ は正で十分小），電子の位置を観測したとき，それが $x \in \mathbb{R}^3$ と $x + \Delta x$ の間の領域に見いだされる確率について語ることはできる（たとえば，3.1.1 項で言及した電子線束の干渉の実験）．この観点からは，状態とは，そのような確率を記述しうるものでなければならないはずである．電子が位置 $x \in \mathbb{R}^3$ と $x + \Delta x$ の間の領域にある確率は，近似的に Δx に比例すると考えられる．それを $\varrho(x)\Delta x$ とすれば，電子は $\mathbb{R}^3$ のどこかに必ずあるわけだから $\sum_x \varrho(x)\Delta x \approx 1$ が成り立たなければならない．$\Delta x \to 0$ の極限に移れば，

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varrho(x)dx = 1 \tag{3.20}$$

を得る．$\varrho(x)$ は電子の存在の確率密度であるから非負値関数であるが，電子の波動的描像と電子線束の干渉実験を考慮すると，これは電子の状態を記述する関数—波動関数—の絶対値の 2 乗に比例すると考えられる．そこで，$\varrho(x)$ は，$\mathbb{R}^3$ 上のある複素値関数 $\psi(x)$ の絶対値の 2 乗であり，ψ が系の状態を記述すると仮定するのは自然である：$\varrho(x) = |\psi(x)|^2$．このとき，(3.20) は，ψ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

という条件を課す．したがって，ψ はその絶対値の 2 乗が可積分な関数でなければならない．公理 QM1 によって，状態の空間はヒルベルト空間でなければならないから，ψ は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ の元であると考えるのが自然である（したがって，ルベーグ測度に関して，ψ と a.e. 等しい関数は同一視されることに注意）．こうして，3 次元空間を運動する，1 個の電子系の状態のヒルベルト空間として，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ が適切である，という仮説に到達する．上の発見法的推論は，電子だけに当てはまる性質は何も使っていないので，いま述べた仮説は，3 次元空間を運動する，空間的自由度だけを有する，任意の量子力学的粒子に対してもあてはまると仮定される．状態のヒルベルト空間に関するいまの仮説は，量子力学的粒子に対する粒子的描像が基礎になっていることに注意されたい．

空間的自由度だけを有する，N 個の量子力学的粒子からなる系の場合は,（粒子的描像から見て）各粒子の運動を記述するための座標を，それぞれ，$x_1,\cdots,x_N \in \mathbb{R}^3$, とすれば，$|\Delta x_1|,\cdots,|\Delta x_N|$ が正で十分小さいとき，各 j 番目の粒子が x_j と $x_j+\Delta x_j$ の間にある確率は非負の関数 $\varrho(x_1,\cdots,x_N)$ を用いて，近似的に $\varrho(x_1,\cdots,x_N)\Delta x_1\cdots\Delta x_n$ と表わされるはずである．1 粒子の場合と同様に，この場合も，確率密度 $\varrho(x_1,\cdots,x_N)$ は，$\mathbb{R}^{3N}$ 上の複素数値関数 $\psi(x_1,\cdots,x_N)$ の絶対値の 2 乗であり，この ψ が系の状態を記述すると仮定するのは自然である．したがって，

$$\int_{\mathbb{R}^{3N}} |\psi(x_1,\cdots,x_N)|^2 dx_1\cdots dx_N = \int_{\mathbb{R}^{3N}} \varrho(x_1,\cdots,x_N) dx_1\cdots dx_N = 1$$

であるので，前段と同様に，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{3N})$ がいまの場合の状態のヒルベルト空間の候補になる．

3.3.2　位置演算子，運動量演算子，正準交換関係

上の電子系における物理量の問題を発見法的に考察しよう．古典力学では，電子の位置と運動量が基本的な物理量であった．量子系において，これらに対応する物理量があるとすれば，公理 QM2 にしたがって，それらは，状態のヒルベルト空間 $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ 上の自己共役演算子で表現されなければならない．いま，これらの自己共役演算子をそれぞれ，$\hat{x}=(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3)$，$\hat{p}=(\hat{p}_1,\hat{p}_2,\hat{p}_3)$ と書き，それぞれ，**位置演算子**，**運動量演算子**とよぶ*16．座標 $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ の各成分 x_j は，電子の位置演算子の第 j 成分 $\hat{x}_j$ のスペクトルの点であることを要請するのは自然であろう（定理 2.28 を参照）．そのような自己共役演算子 $\hat{x}_j$ のうち最も単純なものは関数 x_j によるかけ算演算子である．そこで，次のような仮説を設ける：

$$\mathsf{D}(\hat{x}_j) = \left\{\psi\in\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3) \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}^3} x_j^2|\psi(x)|^2dx<\infty\right\}, \quad (3.21a)$$

$$(\hat{x}_j\psi)(x) = x_j\psi(x), \quad \psi\in\mathsf{D}(\hat{x}_j),\ j=1,2,3. \quad (3.21b)$$

運動量演算子の形をきめるために，実験的に確認される，位置と運動量の間

*16 $\hat{x}$ は演算子の組であるから，本来の意味では，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ 上の演算子ではないが，便宜上，このようによぶ．運動量演算子についても同様．

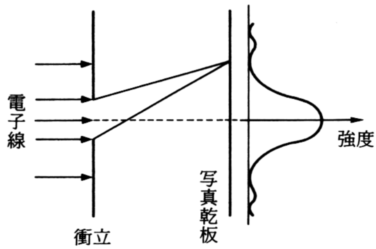


図 3.2 電子線束の回折

の不確定性関係に注目しよう．これは，位置演算子と運動量演算子に対して

$$(\Delta \hat{x}_j)_\psi (\Delta \hat{p}_j)_\psi \geq \frac{1}{2}c, \quad j = 1, 2, 3, \tag{3.22}$$

が成り立つことを要求することになる．ここで，演算子 A と状態ベクトル ψ から決まる量 $(\Delta A)_\psi$ は 3.1.5 項で定義された，A の不確定さであり，$c > 0$ は実験で決められるべき定数である．たとえば，1 つのスリットを通る電子線の回折実験（図 3.2）では，電子の進行方向を x 軸とすれば，スリットによって，電子の y 座標がある精度で決定されているとみなすことができるが，それに対応して，電子の y 軸方向の運動量は不確定性をもち，このために回折が生じると解釈することができる．スリットの大きさを大きくすれば，電子の y 座標の不確定性は大きくなるが，この場合は回折の広がりは小さくなるので，電子の y 軸方向の運動量の不確定性は小さくなり，たしかに電子の y 座標と y 軸方向の運動量の間には不確定性関係があるとみなせるのである．

3.1.5 項の一般化されたハイゼンベルクの不確定性関係をいまの場合にあてはめれば

$$(\Delta \hat{x}_j)_\psi (\Delta \hat{p}_j)_\psi \geq \frac{1}{2}|\langle \psi, [\hat{x}_j, \hat{p}_j]\psi \rangle|, \quad \psi \in \mathsf{D}(\hat{x}_j \hat{p}_j) \cap \mathsf{D}(\hat{p}_j \hat{x}_j), \|\psi\| = 1,$$

であるから，(3.22) が成り立つ十分条件の単純なもののひとつとして，

$$[\hat{x}_j, \hat{p}_j] = \lambda, \quad j = 1, 2, 3,$$

を要請するのは自然であろう．ただし，λ は $|\lambda| = c$ となる複素数である． 実験的に見て，異なる座標軸に対応する位置と運動量（たとえば，x 軸方向の位

置と y 軸方向の運動量）の間および運動量どうしには相関はないと考えられるので

$$[\hat{x}_j, \hat{p}_k] = 0, \quad j \neq k,$$
$$[\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0, \quad j, k = 1, 2, 3,$$

を要求してもよいであろう．位置演算子に関しては，

$$[\hat{x}_j, \hat{x}_k] = 0, \quad j, k = 1, 2, 3,$$

であることは明らかであろう．すべての $j, k = 1, 2, 3$ に対して $\mathsf{D}(\hat{x}_j \hat{p}_k) \cap \mathsf{D}(\hat{p}_k \hat{x}_j)$ は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ で稠密であるとしよう．このとき，容易にわかるように，$\mathsf{D}(\hat{x}_j \hat{p}_j) \cap \mathsf{D}(\hat{p}_j \hat{x}_j)$ 上で $[\hat{x}_j, \hat{p}_j]^* = -[\hat{x}_j, \hat{p}_j]$ であるから，$\lambda^* = -\lambda$ でなければならない．つまり，λ は純虚数でなければならない．そこで $\lambda = i\hbar$ として実数 $\hbar \neq 0$ を導入する．以上の考察をまとめれば，

$$[\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}, \tag{3.23}$$
$$[\hat{x}_j, \hat{x}_k] = [\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0, \quad j, k = 1, 2, 3, \tag{3.24}$$

を得る．これは量子力学における基本的な交換関係のひとつであって，**正準交換関係** (canonical commutation relations; CCR と略す) とよばれる．こうして，物理量が自己共役演算子で表わされるという公理 QM2 と不確定性関係を要請することにより，ある自然な仕方で，電子の位置演算子と運動量演算子に対して CCR が導かれることがわかった．この交換関係は電子以外の素粒子の位置演算子と運動量演算子に対しても成り立つと仮定される．

上の考察からわかるように，CCR は，波動–粒子の二重性を有する素粒子に対する不確定性関係に対応するものであり，力学の詳細には関係しない．したがって，それは，考えている素粒子が，相対論的であるか否かには依らない関係であると考えられる．少なくとも，上述の発見法的論理からすればそうなる．もちろん，この仮説の正当性は，これに基づく理論が実験をよい精度で説明するかどうかによって決定されなければならない．

(3.23) に現われる定数 $\hbar$ は 正であると仮定しても一般性を失わない．なぜなら，もし，$\hbar < 0$ であれば，$-\hat{p}_j$ をあらためて運動量演算子とみなせばよい

からである．この定数 $\hbar$ は，先取りして言えば，実験的には，**プランクの定数** h を 2π で割ったものと同一視されることになる．だが，さしあたっては，ここではそれをひとつのパラメーターと考えることにする．すでに注意したように，量子力学では物理量を表わす演算子の非可換性が本質的である．したがって，CCR に現われるパラメーター $\hbar$ は量子力学的現象を特徴付けるパラメーターと考えられる．CCR において，形式的に $\hbar \to 0$ とすれば，$[\hat{x}_j, \hat{p}_j] \to 0$ となる．これは，$\hbar \to 0$ の極限では，$\hat{x}_j$ と $\hat{p}_j$ は形式的に可換になることを示唆する．一方，古典力学では，すべての物理量は関数であり，したがって，自明的に可換である．こうして，$\hbar \to 0$ の極限は古典力学への移行に対応することが予想される．もちろん，この予想が正しいかどうかは，量子力学の諸々の現実的なモデルにおいて証明されなければならないことである．そして，この場合，いかなる意味で $\hbar \to 0$ の極限が古典力学をあたえるのかが明らかにされなければならない．この問題は，量子力学の**古典極限** (classical limit) **の問題**とよばれている．

3.3.3 運動量演算子の形

次の問題は，演算子 $\hat{x}_j$ が (3.21a), (3.21b) であたえられるとき，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ の適当な部分空間，たとえば，$\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上で CCR をみたす演算子 $\hat{p}_j$ をさがすことである．各 $j = 1, 2, 3$ に対して，∂_j を変数 x_j に関する，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ 上の偏微分演算子としよう．ただし，$\mathsf{D}(\partial_j) := \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ とする（例 1.25 を参照）．このとき，

$$p_{j,0} := -i\hbar\partial_j \tag{3.25}$$

によって定義される演算子 $p_{j,0}$ と x_k は $\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上で CCR をみたすことが直接の計算によってわかる．例 2.10 で示したように，$p_{j,0}$ は対称演算子である（A が対称演算子ならば，任意の実定数 c に対して，cA も対称である）．この演算子に関して次の事実が証明される（証明はすぐあとで行なう）：

命題 3.18 各 j に対して，$p_{j,0}$ は本質的に自己共役である．

したがって，$p_{j,0}$ の閉包 $\bar{p}_{j,0}$ は自己共役であるから，これは物理量としての運動量演算子の候補になる．そこで，

$$\hat{p}_j := \bar{p}_{j,0} = -i\hbar\bar{\partial}_j, \quad j = 1, 2, 3, \tag{3.26}$$

とおく（第2番目の等式を示すのは容易）．これが実際に運動量演算子にふさわしい性質をもっていることは $\hat{p}_j$ のスペクトルを調べたあとで明らかになる（後述を参照）．

さて，命題3.18の証明を行なうために補題をひとつ用意する．d を自然数とし，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の急減少関数の空間とする（付録BのB.1節を参照）．

補題 3.19　各 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ のノルムで，$f_n \to f, \partial_j f_n \to \partial_j f$ $(n \to \infty)$ となる関数列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ が存在する．

証明　$\varrho(0) = 1$, $\operatorname{supp}\varrho \subset \{x \in \mathbb{R}^d | \, |x| \leq 1\}$ をみたす関数 $\varrho \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ をひとつ固定し，任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ と自然数 n に対して，$f_n(x) = \varrho(x/n)f(x)$ とおく．このとき，$f_n \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ であり，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), x \in \mathbb{R}^d$．これと $|\varrho(x/n)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\varrho(x)| < \infty$ に注意して，ルベーグの優収束定理を応用すれば，$\|f_n - f\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)} \to 0$ $(n \to \infty)$ が得られる．さらに

$$\partial_j f_n(x) = \frac{1}{n}(\partial_j \varrho)(x/n)f(x) + \varrho(x/n)\partial_j f(x)$$

であるから，同様にして，$\|\partial_j f_n - \partial_j f\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)} \to 0$ $(n \to \infty)$ が示される．　□

命題 3.18 の証明

定理2.44(iii)の条件がみたされることを示そう．そこで，$\phi \in \mathsf{R}(p_{j,0} + i)^\perp$ とする．補題3.19によって，任意の $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ に対して，$\psi_n \to \psi, \partial_j \psi_n \to \partial_j \psi$ $(n \to \infty)$ ($\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ のノルムで) をみたす $\psi_n \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ がとれる．仮定により，$\langle \phi, (-i\hbar\partial_j + i)\psi_n \rangle = 0$．したがって，$n \to \infty$ とすることにより，$\langle \phi, (-i\partial_j + i)\psi \rangle = 0 \cdots (*)$．$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上のフーリエ変換を $\mathcal{F}_d$ としよう：

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_d f)(k) \ &:= \ \hat{f}(k) := \mathrm{l.i.m.}_{R\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{|x_j| \leq R, j=1,\cdots,d} e^{-ikx} f(x)dx, \\ &\qquad k = (k_1, \cdots, k_d) \in \mathbb{R}^d, \ f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d).\end{aligned} \tag{3.27}$$

ただし，“l.i.m.”は，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ のノルムでの収束（平均 2 乗収束）を表わす（付録 B を参照）．$(*)$ とフーリエ変換に関するパーセヴァルの等式とによって（付録 B を参照），$\int_{\mathbb{R}^3}(k_j+i)\hat{\phi}(k)^*\hat{\psi}(k)dk=0$．シュヴァルツの不等式によって，関数 $(\hbar k_j+i)\hat{\phi}(k)$ は局所可積分関数，すなわち，$\mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ の元であることがわかる（付録 C を参照）．$\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d_k)\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^d_k)$ であるから（$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d_k):=\mathcal{F}_d\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ はフーリエ変換を司る変数 k の関数としての急減少関数の空間を表わす；$\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d_k)$ についても同様），ドゥ・ボワ・レイモンの補題（付録 C，補題 C.3）によって，$(\hbar k_j+i)\hat{\phi}(k)=0,\mathrm{a.e.}k$．したがって，$\hat{\phi}(k)=0,\mathrm{a.e.}k$．これは，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3_k)$ の元として，$\hat{\phi}=0$ を意味する．したがって，$\phi=0$．ゆえに，$\mathsf{R}(p_{j,0}+i)$ は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ で稠密である．同様にして，$\mathsf{R}(p_{j,0}-i)$ の $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ における稠密性が示される． □

命題 3.18 の証明でフーリエ変換が使われた．$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上のフーリエ変換 $\mathcal{F}_d$ は，その全単射性とパーセヴァルの等式によって，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上のユニタリ変換である．このことに注意し，演算子 $\hat{p}_j$ のフーリエ変換を考えると $\hat{p}_j$ をもっとよく知ることができる：

定理 3.20 演算子の等式

$$\mathcal{F}_3\hat{p}_j\mathcal{F}_3^{-1}=\hbar k_j,\quad j=1,2,3, \tag{3.28}$$

が成立する．ここで，$k=(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{R}^3$ はフーリエ変換 $\mathcal{F}_3$ の変数，右辺の $\hbar k_j$ は関数 $\hbar k_j$ によるかけ算演算子である．

証明 命題 3.18 によって，任意の $\psi\in\mathsf{D}(\hat{p}_j)$ に対して，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ のノルムで，$\psi_n\to\psi$, $\hat{p}_j\psi_n\to\hat{p}_j\psi\ (n\to\infty)$ となる $\psi_n\in\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ が存在する．したがって，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ の収束の意味で，$\hat{\psi}_n\to\hat{\psi}$, $\mathcal{F}_3\hat{p}_j\psi_n\to\mathcal{F}_3\hat{p}_j\psi$．適当な部分列 $\{\psi_{n_q}\}_q$ をとれば，$\hat{\psi}_{n_q}(k)\to\hat{\psi}(k)$, $(\mathcal{F}_3\hat{p}_j\psi_n)(k)\to(\mathcal{F}_3\hat{p}_j\psi)(k),\mathrm{a.e.}k\ (q\to\infty)$．他方，$(\mathcal{F}_3\hat{p}_j\psi_n)(k)=\hbar k_j\hat{\psi}_n(k)$．したがって，$\hbar k_j\hat{\psi}_{n_q}(k)\to\hbar k_j\hat{\psi}(k),\mathrm{a.e.}k$ $(q\to\infty)$．ゆえに，$(\mathcal{F}_3\hat{p}_j\psi)(k)=\hbar k_j\hat{\psi}(k)$, a.e.$k$．これは，$\hat{\psi}\in\mathsf{D}(\hbar k_j)$ であり，$\mathcal{F}_3\hat{p}_j\mathcal{F}_3^{-1}\subset\hbar k_j$ を意味する（$\mathsf{D}(\mathcal{F}_3\hat{p}_j\mathcal{F}_3^{-1})=\mathcal{F}_3\mathsf{D}(\hat{p}_j)$ に注意）．$\mathcal{F}_3$ はユニタリ変換であるから，$\mathcal{F}_3\hat{p}_j\mathcal{F}_3^{-1}$ は自己共役である（定理 2.36）．$\hbar k_j$ も自己共役演算子であるから，命題 2.34 によって，(3.28) が得られる． □

演算子 $\hat{p}_j$ は別の形でも同定できる：

定理 3.21 演算子の等式

$$\hat{p}_j = i\hbar\partial_j^* \tag{3.29}$$

が成立する．

証明 任意の $\psi \in \mathsf{D}(\hat{p}_j)$ と $\phi \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ に対して，$\langle \hat{p}_j\psi, \phi\rangle = \langle i\hbar\psi, \partial_j\phi\rangle$．したがって，$\psi \in \mathsf{D}(\partial_j^*)$ であり，$\hat{p}_j\psi = i\hbar\partial_j^*\psi$．これは，$\hat{p}_j \subset i\hbar\partial_j^*$ を意味する．

逆に，$\psi \in \mathsf{D}(\partial_j^*)$ ならば，任意の $f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ に対して．

$$\langle \psi, \hat{p}_j f\rangle = \langle i\hbar\partial_j^*\psi, f\rangle. \tag{3.30}$$

命題 3.18 によって，$\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ は $\hat{p}_j$ の芯であるから，任意の $\phi \in \mathsf{D}(\hat{p}_j)$ に対して，$f_n \to \phi$, $\hat{p}_j f_n \to \hat{p}_j\phi$ $(n \to \infty)$ をみたす $f_n \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ が存在する．(3.30) の f に f_n を代入し，$n \to \infty$ とすれば，$\langle \psi, \hat{p}_j\phi\rangle = \langle i\hbar\partial_j^*\psi, \phi\rangle$ を得る．したがって，$\psi \in \mathsf{D}(\hat{p}_j^*) = \mathsf{D}(\hat{p}_j)$ かつ $\hat{p}_j\psi = i\hbar\partial_j^*\psi$．以上から，(3.29) が成立する． □

明らかに，

$$-\partial_j^* \restriction \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3) = \partial_j.$$

そこで，

$$D_j := -\partial_j^* \tag{3.31}$$

とおき，これを $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上の**一般化された偏微分演算子** (generalized partial differential operator) とよぶ．これを用いると，(3.29) は

$$\hat{p}_j = -i\hbar D_j \tag{3.32}$$

と書き直せる．

注意　付録 C の C.3 節において叙述してあるように，超関数の空間において，微分演算子 D_j が定義される．いま，これを $\hat{D}_j$ と記す．(3.31) で定義される演算子 D_j は，$\psi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ に対しての超関数微分 $\hat{D}_j\psi$ が関数と同一視でき，それが $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ の元となるような ψ に定義域を制限した $\hat{D}_j$ である．すなわち，

$$\mathsf{D}(D_j) := \{\psi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3) | \hat{D}_j\psi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)\},$$
$$D_j\psi = \hat{D}_j\psi,\ \psi \in \mathsf{D}(D_j).$$

この事実は，超関数のフーリエ変換を使えば容易に証明される．

定理 3.20 から，$\hat{p}_j$ のスペクトルを同定することができる：

系 3.22

$$\sigma(\hat{p}_j) = \{\hbar k_j | k_j \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}, \tag{3.33}$$
$$\sigma_{\mathrm{p}}(\hat{p}_j) = \emptyset. \tag{3.34}$$

証明　(3.33) は，スペクトルのユニタリ不変性，定理 3.20 とかけ算演算子のスペクトルの性質（定理 2.28) から導かれる．　□

(3.33) の物理的意味を考察しよう．粒子的描像において，運動量の値が $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$，エネルギーの値が E である自由粒子を波動描像で見た場合，その波数ベクトルを $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3$, 角振動数を ω とすれば，

$$p = \hbar k, \quad E = \hbar\omega, \tag{3.35}$$

という関係が成立する．これは，**プランク-アインシュタイン-ド・ブロイの関係式**とよばれるものであり，量子力学的粒子の波動–粒子の二重性のひとつの定量的表現をあたえる．この関係式と (3.34) を比べてみると次のことがわかる．すなわち，フーリエ変換を司る変数 k を波数ベクトルを表わす変数と解釈すれば，まさに，演算子 $\hat{p}_j$ のスペクトルは，運動量の可能な観測値の全体をあたえているということである．こうして，$\hat{p}_j$ を**自由粒子の運動量演算子**と解釈するのは正当であることが示されると同時に，本書でこれまでに叙述した量子力学の形

式と正準交換関係が波動–粒子の二重性を見事に表現することがわかる．いま示したことから，物理学の慣習として，変数 x に関する $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ の状態ベクトルを**座標表示**の状態ベクトル，そのフーリエ変換を**運動量表示**の状態ベクトルとよぶ．

3.3.4 一般の CCR

純粋に代数的な観点からは，CCR，すなわち，(3.23)，(3.24) は，$2d$ 個の代数的な量 $\{Q_j, P_j\}_{j=1}^d$ に対する，もっと一般の代数関係式

$$[Q_j, P_k] = i\hbar\delta_{jk}, \tag{3.36}$$

$$[Q_j, Q_k] = [P_j, P_k] = 0,\ j, k = 1, \cdots, d, \tag{3.37}$$

へと拡張して考えるのが自然である．この関係式を**自由度 d の** CCR とよぶ．これと関連して，上述の議論は次のように一般化されうるであろう．よく知られているように，自由度 d の（ハミルトン形式にしたがう）古典力学系は，$2d$ 個の正準変数 $q_1, \cdots, q_d$, $p_1, \cdots, p_d$ を用いて記述される．この場合，$q = (q_1, \cdots, q_d)$ と $p = (p_1, \cdots, p_d)$ は，それぞれ，一般化座標，一般化運動量とよばれる．このような古典力学系に対応する量子系の力学を記述する理論の構成に対しては，q_j, p_j は，それぞれ，あるヒルベルト空間 H 上の自己共役演算子 Q_j, P_j で (3.36), (3.37) をみたすものによって置き換えられなければならないことが要請される．この要請は，古典力学系から量子系へ移行する処方，すなわち，**量子化**の方法のひとつをあたえるものである．この量子化の手続きは**正準量子化** (canonical quantization) とよばれる．

正準量子化の観点からは，したがって，(3.36), (3.37) をみたすような自己共役演算子 Q_j, P_j を適当なヒルベルト空間上に構成すること，すなわち，**CCR の表現**が重要な問題になる．CCR の表現は厳密には次のように定義される：ヒルベルト空間 H 上の自己共演算子の組 $\{Q_j,\ P_j\}_{j=1}^d$ と H の稠密な部分空間 D があって，$\mathsf{D} \subset \cap_{j,k=1}^d [\mathsf{D}(Q_jQ_k) \cap \mathsf{D}(Q_jP_k) \cap \mathsf{D}(P_kQ_j) \cap \mathsf{D}(P_jP_k)]$ をみたし，D 上で (3.36), (3.37) が成立するとき，$\{\mathsf{H}, \mathsf{D}, \{Q_j, P_j\}_{j=1}^d\}$ を**自由度 d の CCR の表現** (representation) という．CCR の表現の問題については，続編『量子物理の数理』で詳しく論じる（章末問題 19 を参照）．

例 3.3　3.3.2 項で定義した演算子の組 $\{\hat{x}_j, \hat{p}_j\}_{j=1}^3$ は，自由度 3 の CCR の表現のひとつをあたえる（この場合，$\mathsf{H} = \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ で，D としては，たとえば，$\mathsf{D} = \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ または $\mathsf{D} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ がとれる）．この表現を一般の自由度 d の場合に拡張するのは容易である．実際，ヒルベルト空間として，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ をとり，

$$Q_j^{\mathrm{S}} = \hat{x}_j := M_{x_j} \quad (x_j \text{をかける演算子}) \tag{3.38}$$

$$P_j^{\mathrm{S}} = -i\hbar D_j, \quad j = 1, 2, \cdots, d, \tag{3.39}$$

と定義すれば (一般化された偏微分演算子 D_j の定義は d 変数の場合も $d = 3$ の場合と同様に定義される：$D_j = -\partial_j^*$)，これらは自己共役であり（P_j^S の自己共役性の証明は p_j のそれと全く同様)，$\mathsf{D} = \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ または $\mathsf{D} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上で自由度 d の CCR をみたす．序章で述べたように，量子力学は，歴史的には，外見が異なる二つの形式において誕生した．そのうちのひとつであるシュレーディンガー流の量子力学—波動力学—は，本書の観点から見れば，CCR の表現として，$\{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d), \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \{Q_j^{\mathrm{S}}, P_j^{\mathrm{S}}\}_{j=1}^d\}$ を用いたものに他ならない．この事実にちなんで，この表現を CCR の**シュレーディンガー表現**とよぶ．この表現における状態ベクトル（これは $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ の元）を記述する関数の絶対値の 2 乗は粒子の位置の確率密度を表わすので，CCR のシュレーディンガー表現は慣習的に**座標表示**あるいは $\boldsymbol{q}$ **表示**とよばれる．

$\mathcal{F}$ を d 次元のフーリエ変換としよう．これは $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上のユニタリ変換であり（付録 B，定理 B.7 を参照)，

$$Q_j^{\mathrm{S}'} := \mathcal{F} Q_j^{\mathrm{S}} \mathcal{F}^{-1}, \quad P_j^{\mathrm{S}'} := \mathcal{F} P_j^{\mathrm{S}} \mathcal{F}^{-1},$$

とおけば，$\{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}_k^d), \mathcal{S}(\mathbb{R}_k^d), \{Q_j^{\mathrm{S}'}, P_j^{\mathrm{S}'}\}_{j=1}^d\}$ も CCR の表現になる（$k \in \mathbb{R}^d$ はフーリエ変換の変数；$\mathcal{F}\mathcal{S}(\mathbb{R}_x^d) = \mathcal{S}(\mathbb{R}_k^d)$ に注意)．定理 3.20 と同様にして，演算子の等式

$$Q_j^{\mathrm{S}'} = iD_{k_j} (D_{k_j} \text{は，変数 } k_j \text{による一般化された偏微分演算子})$$

$$P_j^{\mathrm{S}'} = M_{\hbar k_j} \ (\text{関数 } \hbar k_j \text{ によるかけ算演算子})$$

を証明することができる．したがって，この CCR の表現では，ベクトル $\psi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}_k^d)$ によって記述される状態に関して，$|\psi(p/\hbar)|^2$ は運動量 $p := \hbar k$ の確率

密度をあたえると解釈される（すなわち，運動量がボレル集合 $B \subset \mathbb{R}^d$ の中にある確率は $\int_B |\psi(p/\hbar)|^2 dp / \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(p/\hbar)|^2 dp$）．このことから，CCR の表現 $\{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}_k^d), \mathcal{S}(\mathbb{R}_k^d), \{Q_j^{\mathrm{S}'}, P_j^{\mathrm{S}'}\}_{j=1}^d\}$ は慣習的に**運動量表示**あるいは $\boldsymbol{p}$ 表示とよばれる．

これら二つの CCR の表現はユニタリ変換（フーリエ変換）でうつりあっているので，各々の表現によって記述される量子系は，同等である（3.1.2 項の終わりを参照）．

例 3.4 $\mathbb{Z}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ とし，$\mathbb{Z}$ の d 個の直積空間 $\mathbb{Z}^d = \{\mathbf{n} := (n_1, \cdots, n_d) | n_j \in \mathbb{Z}_+,\ j = 1, \cdots, d\}$ から $\mathbb{C}$ への写像 ψ で $\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}_+^d} |\psi(\mathbf{n})|^2 < \infty$ をみたすものの全体を $l^2(\mathbb{Z}_+^d)$ とする．これは，言い換えれば，d 重数列でその絶対値の 2 乗の和が収束するようなものの全体である．空間 l^2 の場合と同様にして，$l^2(\mathbb{Z}_+^d)$ はベクトル空間であることがわかる．さらに，任意の二つの元 $\psi, \phi \in l^2(\mathbb{Z}_+^d)$ に対して，複素数 $\langle \psi, \phi \rangle$ を

$$\langle \psi, \phi \rangle := \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}_+^d} \psi(\mathbf{n})^* \phi(\mathbf{n})$$

によって定義すれば，これは $l^2(\mathbb{Z}_+^d)$ の内積であり，この内積に関して，$l^2(\mathbb{Z}_+^d)$ はヒルベルト空間になる（証明は l^2 の場合と全く同様）．1 章の例 1.18 と同様にして，$l^2(\mathbb{Z}_+^d)$ の部分集合

$$l_0^2(\mathbb{Z}_+^d) := \{\psi \in l^2(\mathbb{Z}_+^d) |\ \text{ある番号 } N \text{ があって，}\ n_j \geq N,\ j = 1, \cdots, d, \text{ ならば } \psi(\mathbf{n}) = 0\}$$

は稠密な部分空間であることがわかる．

$\mathbb{R}^d$ の標準基底を $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d$ としよう：

$$\mathbf{e}_j := (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots 0)\ (j \text{ 番目の成分のみ } 1 \text{ で他の成分は } 0).$$

ヒルベルト空間 $l^2(\mathbb{Z}_+^d)$ 上に演算子 Q_j^{H}, P_j^{H}, $j = 1, \cdots, d$, を次のように定義

する：

$$\mathsf{D}(Q_j^{\mathrm{H}}) := \left\{\psi \in l^2(\mathbb{Z}_+^d) \middle| \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}_+^d} |\sqrt{n_j}\psi(\mathbf{n}-\mathbf{e}_j) + \sqrt{n_j+1}\psi(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j)|^2 < \infty\right\},$$

$$(Q_j^{\mathrm{H}}\psi)(\mathbf{n}) := \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\{\sqrt{n_j}\psi(\mathbf{n}-\mathbf{e}_j) + \sqrt{n_j+1}\psi(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j)\},\ \psi \in \mathsf{D}(Q_j^{\mathrm{H}}),$$

$$\mathsf{D}(P_j^{\mathrm{H}}) := \left\{\psi \in l^2(\mathbb{Z}_+^d) \middle| \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}_+^d} |\sqrt{n_j}\psi(\mathbf{n}-\mathbf{e}_j) - \sqrt{n_j+1}\psi(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j)|^2 < \infty\right\},$$

$$(P_j^{\mathrm{H}}\psi)(\mathbf{n}) := ic\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\{\sqrt{n_j}\psi(\mathbf{n}-\mathbf{e}_j) - \sqrt{n_j+1}\psi(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j)\},\ \psi \in \mathsf{D}(P_j^{\mathrm{H}}).$$

ただし，c は零でない任意の実数，$n_j = 0$ ならば，$\psi(\mathbf{n}-\mathbf{e}_j) = 0$ と規約する．明らかに，Q_j^{H}，P_j^{H} は $l_0^2(\mathbb{Z}_+^d)$ を不変にする．直接の計算により，$l_0^2(\mathbb{Z}_+^d)$ 上で CCR

$$[Q_j^{\mathrm{H}}, P_k^{\mathrm{H}}] = i\hbar\delta_{jk},$$
$$[Q_j^{\mathrm{H}}, Q_k^{\mathrm{H}}] = [P_j^{\mathrm{H}}, P_k^{\mathrm{H}}] = 0,\ j,k = 1,\cdots,d,$$

がみたされることがわかる．さらに，すぐあとで証明するように，次の事実が成立する：

(★)　$Q_j^{\mathrm{H}}, P_j^{\mathrm{H}}$ は自己共役である．

ゆえに，$\{l^2(\mathbb{Z}_+^d), l_0^2(\mathbb{Z}_+^d), \{Q_j^{\mathrm{H}}, P_j^{\mathrm{H}}\}_{j=1}^d\}$ は自由度 d の CCR の表現をあたえる．

(★) の証明

証明を通じて，$Q_j^{\mathrm{H}} = Q_j$，$P_j^{\mathrm{H}} = P_j$ と書く．Q_j, P_j が対称演算子であることは容易にわかる．これが閉であることを示そう．点列 $\{\psi_N\}_{N=1}^\infty \subset \mathsf{D}(Q_j)$ が $\psi_N \to \psi \in l^2(\mathbb{Z}_+^d)$，$Q_j\psi_N \to \phi \in l^2(\mathbb{Z}_+^d)$ $(N\to\infty)$ をみたすとする．したがって，各 $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^d$ に対して，$\psi_N(\mathbf{n}) \to \psi(\mathbf{n})$，$(Q_j\psi_N)(\mathbf{n}) \to \phi(\mathbf{n})$ $(N\to\infty)$．これと Q_j の定義から，

$$\phi(\mathbf{n}) = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\{\sqrt{n_j}\psi(\mathbf{n}-\mathbf{e}_j) + \sqrt{n_j+1}\psi(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j)\}.$$

$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}_+^d} |\phi(\mathbf{n})|^2 < \infty$ であるから，$\psi \in \mathsf{D}(Q_j)$ かつ $Q_j\psi = \phi$. ゆえに Q_j は閉である．P_j についても同様．

次に，Q_j, P_j は $l_0^2(\mathbb{Z}_+^d)$ 上で本質的に自己共役であることを示す．そのために，2 章の定理 2.44 を応用する．$\phi \in \mathsf{R}\left((Q_j + i) \restriction l_0^2(\mathbb{Z}_+^d)\right)^\perp$ としよう．したがって，すべての $\psi \in l_0^2(\mathbb{Z}_+^d)$ に対して，$\langle \phi, (Q_j + i)\psi\rangle = 0$. そこで，$\psi$ として，

$$\psi_{\mathbf{m}}(\mathbf{n}) := \delta_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = \prod_{j=1}^d \delta_{m_j n_j}$$

によって定義されるベクトル $\psi_{\mathbf{m}}$ $(\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_+^d)$ をとり，$c' = c^{-1}\sqrt{\hbar/2}$ とおくと，

$$i\phi(\mathbf{m}) = c'\{\sqrt{m_j + 1}\phi(\mathbf{m} + \mathbf{e}_j) + \sqrt{m_j}\phi(\mathbf{m} - \mathbf{e}_j)\}$$

を得る．両辺に $\phi(\mathbf{m})^*$ をかけて，$\mathbf{m}$ について和をとれば，

$$i\|\phi\|^2 = c' \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_+^d} \{\sqrt{m_j + 1}\phi(\mathbf{m})^*\phi(\mathbf{m} + \mathbf{e}_j) + \sqrt{m_j}\phi(\mathbf{m})^*\phi(\mathbf{m} - \mathbf{e}_j)\}.$$

ここで，右辺は実数であることに注意すれば，$\|\phi\|^2 = 0$，すなわち，$\phi = 0$ でなければならない．したがって，$\mathsf{R}\left((Q_j + i) \restriction l_0^2(\mathbb{Z}_+^d)\right)^\perp = \{0\}$. これは $\mathsf{R}\left((Q_j + i) \restriction l_0^2(\mathbb{Z}_+^d)\right)$ が稠密であることを意味する．ゆえに，定理 2.44 によって，Q_j は $l_0^2(\mathbb{Z}_+^d)$ 上で本質的に自己共役である．P_j の本質的自己共役性も同様にして証明される．すでに示したように，Q_j, P_j は閉対称演算子であるから，$Q_j = \overline{Q_j \restriction l_0^2(\mathbb{Z}_+^d)}$, $P_j = \overline{Q_j \restriction l_0^2(\mathbb{Z}_+^d)}$ となり，(★) の主張が得られる．　□

ボルン-ハイゼンベルク-ヨルダン流の量子力学の形式—“行列力学”— は，本書の観点からは，この例における CCR の表現 $\{l^2(\mathbb{Z}_+^d), l_0^2(\mathbb{Z}_+^d), \{Q_j^{\mathrm{H}}, P_j^{\mathrm{H}}\}_{j=1}^d\}$ を用いて展開された量子力学である．そこで，この CCR の表現を**ボルン-ハイゼンベルク-ヨルダン表現**とよぼう．

上の証明で導入したベクトル $\psi_{\mathbf{m}}$ の全体 $\{\psi_{\mathbf{m}}\}_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_+^d}$ は $l^2(\mathbb{Z}_+^d)$ の CONS で

ある．この基底を用いると，任意の $\psi \in \mathsf{D}(Q_j)$ に対して，

$$\begin{aligned}(Q_j^{\mathrm{H}}\psi)(\mathbf{m}) &= \langle \psi_{\mathbf{m}}, Q_j^{\mathrm{H}}\psi\rangle \\ &= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}_+^d} \langle Q_j^{\mathrm{H}}\psi_{\mathbf{m}}, \psi_{\mathbf{n}}\rangle\langle\psi_{\mathbf{n}}, \psi\rangle \\ &= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}_+^d} Q_{\mathbf{mn}}^{\mathrm{H}}\langle\psi_{\mathbf{n}}, \psi\rangle.\end{aligned}$$

ただし，

$$\begin{aligned}Q_{\mathbf{mn}}^{\mathrm{H}} :&= \langle \psi_{\mathbf{m}}, Q_j^{\mathrm{H}}\psi_{\mathbf{n}}\rangle \\ &= \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left(\sqrt{m_j}\,\delta_{\mathbf{m}-\mathbf{e}_j,\mathbf{n}} + \sqrt{m_j+1}\,\delta_{\mathbf{m}+\mathbf{e}_j,\mathbf{n}}\right).\end{aligned}$$

これは，CONS$\{\psi_{\mathbf{m}}\}_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}_+^d}$ に関する，演算子 Q_j^{H} の“行列表示”に他ならない．P_j^{H} についても同様の行列表示が求められる．ボルン-ハイゼンベルク-ヨルダンたちは，この種の行列表示を用いて，量子力学を展開したため，彼らの理論は“行列力学”とよばれたのである．

上の二つの例の他にも CCR のいろいろなの表現を構成することは可能である．そこで，外見が異なる種々の CCR の表現の分類が問題になる．つまり，それらを同値なものとそうでないものに分ける問題である．容易にわかるように，$\{\mathsf{H}, \mathsf{D}, \{Q_j, P_j\}_{j=1}^d\}$ が CCR の表現であるとき，これをヒルベルト空間 K へ，ユニタリ変換 U によってうつしたもの $\{\mathsf{K}, \mathsf{D}', \{Q_j', P_j'\}_{j=1}^d\}$ ($\mathsf{D}' := U\mathsf{D}$, $Q_j' := UQ_jU^{-1}$, $P_j' = UP_jU^{-1}$) も CCR の表現である．このような二つの表現は**ユニタリ同値**であるという．ヒルベルト空間形式の量子力学では，ユニタリ同値な表現たちは本質的に同じものとみなせるので，それらは互いに同値であると定義するのは自然である（同値でない CCR の表現の簡単な例については章末問題 19 を参照）．CCR の表現の分類の問題は，同値性の概念も含めて，続編『量子物理の数理』でさらに詳しく論じることにする．詳細はそこでの論述に譲るが，上にあげた二つの CCR の表現は同値であることが示される (3.8 節 3.8.6 項も参照)．こうして，量子力学を CCR の表現論としてとらえることにより，

シュレーディンガーの波動力学とボルン-ハイゼンベルク-ヨルダンの行列力学の“同等性”に対する厳密な意味づけと証明が可能となる.

CCR のシュレーディンガー表現 $\{Q_j^{\mathrm{S}}, P_j^{\mathrm{S}}\}_{j=1}^d$ およびボルン-ハイゼンベルク-ヨルダン表現 $\{Q_j^{\mathrm{H}}, P_j^{\mathrm{H}}\}_{j=1}^d$ においては, $Q_j^{\#}, P_j^{\#}$ ($\# = \mathrm{S}$, H) のいずれも非有界な演算子である. 実は一般的に次のことがいえる:

定理 3.23 CCR の任意の表現 $\{\mathsf{H}, \mathsf{D}, \{Q_j, P_j\}_{j=1}^d\}$ において, 各 j に対して, Q_j, P_j の少なくとも一方は非有界である.

これは, 次の一般的定理を $A = Q_j, B = P_j$ の場合に応用すれば得られる.

定理 3.24 A, B をヒルベルト空間 H 上の演算子で, 稠密な部分空間 $\mathsf{D} \subset \mathsf{D}(AB) \cap \mathsf{D}(BA)$ 上で交換関係

$$[A, B] = \lambda \tag{3.40}$$

をみたすものとする. ただし, $\lambda \neq 0$ は複素数である. このとき, A, B の少なくとも一方は非有界である.

証明 仮定の条件から, $\mathsf{D}(A), \mathsf{D}(B)$ はともに稠密である. 仮に A, B ともに有界であるとすれば, 拡大定理により, A, B は H 全体で定義された有界演算子として一般性を失わない. このとき, (3.40) をくりかえし使うことにより, 帰納的に

$$A^{n+1}B - BA^{n+1} = (n+1)\lambda A^n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

が示される. したがって,

$$|\lambda|(n+1)\|A^n\| \leq 2\|A^{n+1}\|\,\|B\| \leq 2\|A^n\|\,\|A\|\,\|B\|. \tag{3.41}$$

ある n_0 で $A^{n_0} = 0$ ならば, (3.41) の第 1 の不等式を繰り返し用いることにより, $A = 0$ が得られる. だが, これは (3.40) と矛盾する. したがって, すべての $n \geq 1$ に対して, $A^n \neq 0$. ゆえに, $|\lambda|(n+1) \leq \|A\|\,\|B\|$. n を大きくすれば, 左辺はいくらでも大きくなるから, これは矛盾である. □

3.3.5　CCR とポアッソン括弧

3.3.2 項では，微視的対象の位置と運動量の不確定性関係と量子力学の公理 QM2 から，CCR を発見法的に導いた．これとは別の道をたどって，古典論から CCR を "発見する" こともできる．いま，正準変数 $q = (q_1, \cdots, q_d)$，$p = (p_1, \cdots, p_d)$ で記述される古典力学系を考えると，この系の物理量は q, p の実数値関数によって表わされる．二つの物理量 $F = F(q,p), G = G(q,p)$ に対して，

$$[F,G]_{\mathrm{PB}} := \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right)$$

が定義される（F, G に対して，必要ななめらかさはつねに仮定する）．これを F, G に対する**ポアッソン** (Poisson) **括弧**という．容易にわかるように，任意の複素数 a, b と物理量 F, G, H に対して次の諸式が成り立つ：

$$[aF + bG, H]_{\mathrm{PB}} = a[F,H]_{\mathrm{PB}} + b[G,H]_{\mathrm{PB}},$$

$$[F,G]_{\mathrm{PB}} = -[G,F]_{\mathrm{PB}},$$

$$[F,[G,H]_{\mathrm{PB}}]_{\mathrm{PB}} + [G,[H,F]_{\mathrm{PB}}]_{\mathrm{PB}} + [H,[F,G]_{\mathrm{PB}}]_{\mathrm{PB}} = 0. \quad \text{(ヤコビの恒等式)}$$

したがって，$[\cdot,\cdot]_{\mathrm{PB}}$ は演算子に対する交換子 $[\cdot,\cdot]$ と同じ性質をもつ．特に，$F = q_j, G = p_k$ の場合を考えると，

$$[q_j, p_k]_{\mathrm{PB}} = \delta_{jk} \tag{3.42}$$

が成り立つ．そこで，この古典力学系に対応する量子系の位置演算子 Q_j と運動量演算子 P_j は，あるヒルベルト空間 H 上の自己共役演算子であり，(3.42) でポアッソン括弧 $[q_j, p_k]_{\mathrm{PB}}$ を交換子 $(i\hbar)^{-1}[Q_j, P_k]$ で置き換えた関係式をみたすことを要請する．したがって，

$$[Q_j, P_k] = i\hbar\delta_{jk}.$$

同様の処方により，$[Q_j, Q_k] = 0, [P_j, P_k] = 0$ が得られる．こうして，ポアッソン括弧の読み変えによって CCR が導かれる．

3.3.6　無限自由度の場合

これは，物理的には連続体上の場の理論や無限粒子系の量子化に関わる場合である．だが，このような場合にも，上で考察した正準量子化の考え方を当てはめることは，形式的には，可能である．もちろん，それがうまく行くかどうかは別問題であるが[*17]．可算無限の自由度の場合は，(3.36), (3.37) で単に $d=\infty$（可算無限）の場合を考えればよい．d 次元空間 $\mathbb{R}^d$ 上のスカラー場の理論の量子化を考えるような場合は，連続変数 $x \in \mathbb{R}^d$ でラベルづけられる代数的対象の族 $\{\phi(x), \pi(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}$ で有限自由度の CCR の "連続無限版"

$$[\phi(x), \pi(y)] = i\hbar\delta^d(x-y), \tag{3.43a}$$

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0 = [\pi(x), \pi(y)], \tag{3.43b}$$

を考えることになる[*18]．ここで，$\delta^d(x)$ は d 次元のディラックのデルタ超関数（付録 C，C.2.2 項参照）である（有限自由度の場合との形式的対応関係は，$x \longleftrightarrow j$, $\phi(x) \longleftrightarrow Q_j$, $\pi(x) \longleftrightarrow P_j$, $\delta^d(x-y) \longleftrightarrow \delta_{jk}$, である）．他の場の理論の量子化の場合も同様である[*19]．4 章 4.4 節で，このような交換関係をみたす対象を構成する．だが，この量子化の処方にしたがってつくられる場の量子論は，いわゆる "発散の困難" を抱えることになった．この量子化の形式に依拠して発見法的につくられる，4 次元時空上の相対論的場の量子論の厳密な意味での数学的な存在はいまだに証明されていない．この点に関して，さらに詳しい事柄については，たとえば，江沢 洋・新井朝雄『場の量子論と統計力学』（日本評論社，1988）のまえがき，第 1 章，第 11 章，あるいは新井朝雄『場の量子論の数学的方法入門』（大阪大学，1997）の第 1 章を参照されたい．

3.3.7　CCR の表現論としての量子力学

これまでの記述から示唆されるように，CCR は古典力学系の量子化の処方をあたえるひとつの規則とみなされうる．だが，量子力学を古典力学よりも根

*17 場の理論の場合には，CCR を導いた直観的考察—これは，たぶんに粒子的描像に依拠している—が果たして妥当するのかどうか疑問の余地がある．これとすぐあとで言及する，場の量子論における "発散の問題" は無関係ではあるまい．

*18 $\phi(x), \pi(y)$ は，古典的には，当該の場の理論における，互いに共役な正準変数である．

*19 ただし，電子のように，スピンが半整数をとるような場に対しては，交換子を反交換子で置き換える必要がある．

源的な理論と見る観点からは，量子力学をそれ自体で規定する原理が最初にあるべきである．この立場からは，“古典系から量子系へ”という考え方を逆転させて，代数構造としての CCR を量子力学の基本原理のひとつと見るのが自然である．ここで重要な点は，ひとつの抽象的な代数構造である CCR そのものとその表現をはっきりと区別する必要があるということである．大本の原理は CCR という抽象的代数構造であって，その表現を通して展開される理論が量子力学的諸現象を記述するのである．量子力学的現象の多様性は CCR の表現の多様性と呼応する．CCR のひとつの表現を実現するヒルベルト空間はある種の物理的描像と密接に結びついており，この描像のもとでとらえられる諸現象を記述する枠組みをあたえる．別の描像には別の表現空間が結びつく．この観点からは，なぜ，量子力学の記述の仕方が外見的に多様でありうるのかが容易に理解される（たとえば，シュレーディンガーの波動力学とボルン-ハイゼンベルク-ヨルダンの行列力学）．CCR の二つの表現が “同値”であれば，記述の外見は異なってもそれらは本質的に同一の物理的内容を記述する（ただ，採用された物理的描像が異なるだけにすぎない）．こうして，量子力学の本質を CCR の表現としてとらえる観点は，量子系の記述に対するひとつの統一的観点を提供する[*20]．

3.4 物理量の例

この節では，CCR の表現を通して，位置演算子や運動量演算子以外の物理量がどのような演算子によってあたえられるかを見る．

3.4.1 基本的な考え方

3.3.7 項で述べたように，量子力学を CCR の表現としてとらえる観点からは，量子系の物理量は，CCR の表現を構成する演算子の “関数”として定義するのが自然である．具体的に言えば次のようになる．$\{\mathsf{H}, \mathsf{D}, \{Q_j, P_j\}_{j=1}^n\}$ を CCR

[*20] CCR は量子系の “外的な”空間的自由度に関わるものと解釈される．他方，スピン等の“内的”な自由度に関わる物理量は，別の代数的構造（群や環）の表現としてとらえられる．したがって，内的な自由度をも考慮にいれた量子力学は，内的な自由度を記述する代数的構造と CCR とをあわせた代数的構造の表現としてとらえられる．

の表現としよう．このとき，Q_j, P_j の関数として定義される演算子で自己共役になるものが物理量の候補になるのである．しかし，ここでただちに問題になるのは，Q_j, P_j は非可換なので，これらの演算子の関数の意味が，一般にはただちに明らかではないということである．この節では，簡単のため，こうした問題が生じない場合だけを考察する．

なお，古典力学系との対応を考慮する場合には，次のようなやり方がなされる．ハミルトン形式で記述される，自由度 n の古典力学系を考え，その一般化座標を $q = (q_1, \cdots, q_n)$，一般化運動量を $p = (p_1, \cdots, p_n)$ とする．これらの組 (q, p) は正準変数とよばれる．この古典力学系に対応する量子系があったとして，その状態のヒルベルト空間を H としよう．正準量子化の処方によれば，q_j に対応する演算子 Q_j と p_j に対応する演算子 P_j は，H 上での CCR の表現のひとつ $\{\mathsf{H}, \mathsf{D}, \{Q_j, P_j\}_{j=1}^n\}$ によってあたえられるとされる．古典力学系の任意の物理量は q, p の実数値関数で表わされる．これをいま $F(q, p)$ としよう．これに対応する，量子系での物理量は，q_j, p_j を，それぞれ，Q_j, P_j で置き換えて得られる，形式的な演算子 "$F(Q, P)$"によって定義するのが自然である．しかし，上に注意したように，"$F(Q, P)$"をどう定義するかは一般には決して自明な問題ではない[*21]．

以下，CCR の表現 $\{\mathsf{H}, \mathsf{D}, \{Q_j, P_j\}_{j=1}^n\}$ をひとつ固定し，定義域に関する煩わしさを避けるために，各 Q_j, P_j は D を不変にすると仮定する：

$$Q_j \mathsf{D} \subset \mathsf{D}, \quad P_j \mathsf{D} \subset \mathsf{D}, \ j = 1, \cdots, n.$$

(つまり，$\psi \in \mathsf{D} \Longrightarrow Q_j\psi, \ P_j\psi \in \mathsf{D}, \ j = 1, \cdots, d.$)

3.4.2 非相対論的ハミルトニアン

正準変数 (q, p) で記述される古典力学系の全エネルギーを q, p を用いて表わしたものは**古典的ハミルトニアン**とよばれる．

---

*21 たとえば，$n = 1$ の場合，$F(q_1, p_1) = q_1^m p_1^l = p_1^l q_1^m$ $(m, l \in \mathbb{N})$ を考えると，$F(Q_1, P_1)$ として，$A := Q_1^m P_1^l$ と $B := P_1^l Q_1^m$ の 2 通りが考えられるが，これらは等しくないので，$F(Q_1, P_1)$ は一意的に決まらない．また，A, B はエルミート演算子ではないから，そのままでは物理量の候補にはなり得ない．もっと一般的には，多項式でない関数 F に対して，"$F(Q, P)$"をどう定義するかが問題になる．この問題については，以下の 3.4.5 項で簡単にふれる．

一般に，量子力学においては，系の状態のヒルベルト空間上の自己共役演算子で（量子力学的な意味で）全エネルギーを記述すると解釈されるものを当該の**量子系のハミルトニアン**とよぶ．

一般の量子系のハミルトニアンの形をア プリオリに決める方法は存在しない．だが，古典力学系の量子化として量子力学系を得るという場合には，ある種の形式的対応によって量子系のハミルトニアンが定義される．

具体的な古典力学系の例として，d 次元空間 $\mathbb{R}^d$ の中を N 個の非相対論的粒子が運動する系を考え，それぞれの粒子の質量を $m_j > 0$, $j = 1, \cdots, N$，位置を

$$x_1 = (x_{11}, \cdots, x_{1d}),\ \cdots, x_N = (x_{N1}, \cdots,\ x_{Nd}) \in \mathbb{R}^d,$$

運動量を $p_1 = (p_{11}, \cdots, p_{1d})$, $\cdots$, $p_N = (p_{N1}, \cdots, p_{Nd}) \in \mathbb{R}^d$, のように表わし，

$$x = (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^{dN}$$

とおく．また，系は $\mathbb{R}^{dN}$ 上のボレル可測な実数値関数 $V = V(x)$ で表わされるポテンシャルの影響化にあるものとする．V はルベーグ測度に関して a.e. 有限であると仮定する．この系の自由度は Nd であり，$q = x$, $p = (p_1, \cdots, p_N)$ である．この古典力学系におけるハミルトニアン，すなわち，古典的ハミルトニアン $H_{\rm cl}$ は次の形をもつ：

$$H_{\rm cl} = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2m_j} + V(x). \tag{3.44}$$

この系に対応する，正準量子化における位置演算子を $Q_{1\alpha}, \cdots, Q_{N\alpha}$，運動量演算子を $P_{1\alpha}, \cdots, P_{N\alpha}$ $(\alpha = 1, \cdots, d)$ とする．$\{Q_{1\alpha}, \cdots, Q_{N\alpha}\}_{\alpha=1}^d$ は強可換であるとし，$Q_{j\alpha}$ のスペクトル測度を $E_{Q_{j\alpha}}$，これらの直積スペクトル測度を E_Q とする：

$$E_Q = E_{Q_{11}} \otimes \cdots \otimes E_{Q_{1d}} \otimes E_{Q_{21}} \otimes \cdots \otimes E_{Q_{2d}} \otimes \cdots \otimes E_{Q_{N1}} \otimes \cdots \otimes E_{Q_{Nd}}. \tag{3.45}$$

このとき，2 章 2.8 節の演算子解析により，H 上のエルミート演算子

$$V(Q) := \int_{\mathbb{R}^{dN}} V(\lambda) dE_Q(\lambda) \tag{3.46}$$

が定義される[*22]．そこで，量子系のハミルトニアンを

$$H := \sum_{j=1}^{N} \frac{P_j^2}{2m_j} + V(Q) \tag{3.47}$$

によって定義する．ただし，$P_j^2 := \sum_{\alpha=1}^{d} P_{j\alpha}^2$．この段階では，$H$ は稠密に定義されているかどうかわからないが，もし，$\mathsf{D}(H) = [\cap_{j=1}^{d} \mathsf{D}(P_j^2)] \cap \mathsf{D}(V(Q))$ が稠密ならば，H が対称演算子であることはすぐにわかる．公理 QM2 の要請によれば，H が物理量であるためには，H は自己共役でなければならない．ここでは，さしあたって，$V = 0$ の場合の H の自己共役性を証明するだけにする：

命題 3.25 $P_{1\alpha}, \cdots, P_{N\alpha}, \alpha = 1, \cdots, d,$ は強可換であると仮定し，これらの自己共役演算子のスペクトル測度からつくられる直積スペクトル測度を E_P とする．このとき，

$$H_0(P) := \sum_{j=1}^{N} \frac{P_j^2}{2m_j} \tag{3.48}$$

は自己共役であり，

$$\sigma(H_0(P)) = \overline{\left\{ \sum_{j=1}^{N} \frac{\lambda_j^2}{2m_j} \middle| (\lambda_1, \cdots, \lambda_N) \in \operatorname{supp} E_P \right\}}. \tag{3.49}$$

特に，$H_0(P) \geq 0$ である．

証明 仮定と演算子解析により，

$$P_{j\alpha} = \int_{\mathbb{R}^{dN}} \lambda_{j\alpha} dE_P(\lambda), \quad j = 1, \cdots, N,\ \alpha = 1, \cdots, d,$$

[*22] いまの仮定だけでは，$V(Q)$ は稠密に定義されているとは限らないことに注意．もちろん，$E_Q(\{\lambda \in \mathbb{R}^{dN} \,||V(\lambda)| = \infty\}) = 0$ ならば，$\mathsf{D}(V(Q))$ は稠密であり，$V(Q)$ は自己共役である．

が成立する $[\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{dN}]$．したがって，

$$P_{j\alpha}^2 = \int_{\mathbb{R}^{dN}} \lambda_{j\alpha}^2 dE_P(\lambda)$$

（定理 2.83(i) の証明と同様）．$\mathbb{R}^{dN}$ 上の関数 $f(\lambda) := \sum_{j=1}^N \lambda_j^2/(2m_j)$ は実数値連続関数であるので，演算子解析により，$f(P) := \int_{\mathbb{R}^{dN}} f(\lambda)dE_P(\lambda)$ は自己共役である．定理 2.83(ii) の証明と同様にして，$\mathsf{D}(H_0(P)) = \mathsf{D}(f(P))$ かつ $f(P) = H_0(P)$ を示すことができる．したがって，$H_0(P)$ は自己共役である．(3.49) は定理 2.71(ix) による[*23]． □

さて，CCR の表現 $\{\mathsf{H}, \mathsf{D}, \{Q_{j\alpha}P_{j\alpha}|\alpha = 1, \cdots, d,\ j = 1, \cdots, N\}$ がシュレーディンガー表現 $\{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN}), \mathcal{S}(\mathbb{R}^{dN}), \{Q_j^{\mathrm{S}}, P_j^{\mathrm{S}}\}_{j=1}^N\}$ の場合を考えてみよう（例 3.3 を参照）．すなわち，

$$Q_j^{\mathrm{S}} := (Q_{j1}^{\mathrm{S}}, \cdots, Q_{jd}^{\mathrm{S}}),$$
$$P_j^{\mathrm{S}} := (P_{j1}^{\mathrm{S}}, \cdots, P_{jd}^{\mathrm{S}}),$$

で $Q_{j\alpha}^{\mathrm{S}}$ は座標関数 $x_{j\alpha}$ によるかけ算演算子，$P_{j\alpha}^{\mathrm{S}} := -i\hbar D_{x_{j\alpha}}$ ($D_{x_{j\alpha}}$ は変数 $x_{j\alpha}$ に関する一般化された偏微分演算子) である．この場合，$Q_{1\alpha}^{\mathrm{S}}, \cdots, Q_{N\alpha}^{\mathrm{S}}, j = 1, \cdots, d,$ は強可換である（例 3.2 を参照）．したがって，上の処方が適用でき，H は

$$H_{\mathrm{S}} := -\sum_{j=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_j}\Delta_{x_j} + V(Q^S) \tag{3.50}$$

という形をとる．ここで，

$$\Delta_{x_j} := \sum_{\alpha=1}^d D_{x_{j\alpha}}^2 \tag{3.51}$$

は変数 $x_j \in \mathbb{R}^d$ に関する**一般化されたラプラシアン** (generalized Laplacian) とよばれる．

演算子 $V(Q^S)$ が何であるかを明らかにしようとすれば次の補題を得る：

[*23] 任意の $\Psi \in \mathsf{D}(H_0(P))$ に対して，$\langle\Psi, H_0(P)\Psi\rangle \geq 0$ が成り立つことはスペクトル分解を用いなくても簡単にわかる．

補題 3.26　F を $\mathbb{R}^{dN}$ 上のルベーグ測度に関して a.e. 有限なボレル可測関数とし（実数値である必要はない），

$$F(Q_S) := \int_{\mathbb{R}^{dN}} F(\lambda) dE_{Q^{\mathrm{S}}}(\lambda) \tag{3.52}$$

とおく．ただし，$E_{Q^{\mathrm{S}}}$ は，(3.45) の E_Q で $Q = Q^{\mathrm{S}}$ の場合の直積スペクトル測度である．このとき，演算子の等式

$$F(Q^{\mathrm{S}}) = M_F \tag{3.53}$$

が成立する．ここで，M_F は関数 F によるかけ算演算子である．

証明　例 3.2 によって，

$$E_{Q^{\mathrm{S}}}(B) = M_{\chi_B}, \quad B \in \mathsf{B}^{dN}. \tag{3.54}$$

したがって，任意の $\psi, \phi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN}), B \in \mathsf{B}^{dN}$ に対して，

$$\langle \psi, E_{Q^{\mathrm{S}}}(B)\phi \rangle = \int_B \psi(x)^* \phi(x) dx.$$

ゆえに，$\psi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})$ について，

$$\int_{\mathbb{R}^{dN}} |F(\lambda)|^2 d\langle \psi, E_{Q^{\mathrm{S}}}(\lambda)\psi \rangle < \infty \Longleftrightarrow \int_{\mathbb{R}^{dN}} |F(x)|^2 |\psi(x)|^2 dx < \infty.$$

これは，$\mathsf{D}(F(Q^{\mathrm{S}})) = \mathsf{D}(M_F)$ を意味する．さらに，任意の $\psi \in \mathsf{D}(F(Q^{\mathrm{S}})), \phi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle \phi, F(Q^{\mathrm{S}})\psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^{dN}} F(\lambda) d\langle \phi, E_{Q^{\mathrm{S}}}(\lambda)\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^{dN}} F(x)\phi(x)^* \psi(x) dx \\ &= \langle \phi, M_F \psi \rangle.\end{aligned}$$

よって，(3.53) が成立する．　□

補題 3.26 のおかげで，$\mathbb{R}^{dN}$ 上の関数 F によるかけ算演算子 M_F を F と書いても問題は生じない．そこで，**以後，かけ算演算子 M_F を単に F と記すこ**

とにする．そうすると，補題 3.26 によって，シュレーディンガー表現でのハミルトニアン H_{S} は

$$H_{\mathrm{S}} = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\hbar^2}{2m_j} \Delta_{x_j} + V \tag{3.55}$$

と書かれる．この型の演算子を**シュレーディンガー演算子**とよぶ．こうして，空間的自由度だけを有する非相対論的な粒子からなる古典力学系の正準量子化によって得られる非相対論的な量子力学系のハミルトニアンは，**CCR のシュレーディンガー表現においては**，シュレーディンガー演算子であたえられることがわかった．シュレーディンガー表現以外の CCR の表現では，当然，ハミルトニアンの形は異なる．もし，それらがユニタリ同値（2 章 2.2.4 項を参照）であれば，それらのスペクトルと点スペクトルは一致するので，物理的には同じ結果をあたえる．だが，そうでない場合には，表現の選び方によって，物理的な結果は異なりうる．これに関連する事柄については，続編『量子物理の数理』でさらに詳しく述べる予定である．

ハミルトニアンは，古典力学においてと同様に，量子力学でも重要な役割を演じる物理量である．この理由から，量子力学の数学理論においては，シュレーディンガー演算子が数学的解析の重要な対象のひとつになる．シュレーディンガー演算子に対する一般的な議論は章をあらためて行なうことにする．ここでは，自由粒子系のハミルトニアン，すなわち，$V = 0$ の場合のシュレーディンガー演算子

$$H_0^{(N)} := -\sum_{j=1}^{N} \frac{\hbar^2}{2m_j} \Delta_{x_j} \tag{3.56}$$

の基本的性質を見ておく．演算子 $H_0^{(N)}$ を**自由ハミルトニアン** (free Hamiltonian) という．

補題 3.27　A をヒルベルト空間 H 上の自己共役演算子，B をヒルベルト空間 K 上の自己共役演算子とし，A と B はユニタリ同値，すなわち，ユニタリ変換 $U : \mathsf{H} \to \mathsf{K}$ が存在して，演算子の等式 $UAU^{-1} = B$ が成立するとする．A, B のスペクトル測度を，それぞれ，E_A, E_B とする．このとき，

(i) 任意のボレル集合 $J \in \mathsf{B}^1$ に対して,

$$UE_A(J)U^{-1} = E_B(J).$$

(ii) $\mathbb{R}$ 上の任意のボレル可測関数 f に対して,

$$Uf(A)U^{-1} = f(B).$$

証明 (i) $F(J) = UE_A(J)U^{-1}$, $J \in \mathsf{B}^1$ とおけば, F が 1 次元スペクトル測度であることは容易に確かめられる. $C = \int_{\mathbb{R}} \lambda dF(\lambda)$ とおこう. このとき,

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\langle \Psi, F(\lambda)\Psi\rangle < \infty \Longleftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\langle U^{-1}\Psi, E_A(\lambda)U^{-1}\Psi\rangle < \infty$$

であるから, $\mathsf{D}(C) = U\mathsf{D}(A) = \mathsf{D}(B)$. この事実と演算子解析により, 任意の $\Psi \in \mathsf{D}(C), \Phi \in \mathsf{K}$, に対して,

$$\begin{aligned}\langle \Phi, C\Psi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle \Phi, F(\lambda)\Psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle U^{-1}\Phi, E_A(\lambda)U^{-1}\Psi\rangle \\ &= \langle U^{-1}\Phi, AU^{-1}\Psi\rangle = \langle \Phi, B\Psi\rangle.\end{aligned}$$

したがって, $C = B$. ゆえに, 自己共役演算子に同伴するスペクトル測度の一意性により, $F = E_B$ でなければならない.

(ii) (i) の結果により, $\mathsf{D}(Uf(A)U^{-1}) = \mathsf{D}(f(B))$ が示される. 任意の $\Phi \in \mathsf{K}, \Psi \in \mathsf{D}(Uf(A)) = \mathsf{D}(f(B))$ に対して,

$$\begin{aligned}\langle \Phi, Uf(A)U^{-1}\Psi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle U^{-1}\Phi, E_A(\lambda)U^{-1}\Psi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle \Phi, E_B(\lambda)\Psi\rangle = \langle \Phi, f(B)\Psi\rangle.\end{aligned}$$

したがって, 求める結果を得る. □

定理 3.28 自由ハミルトニアン $H_0^{(N)}$ は非負の自己共役演算子である. さらに,

$$\begin{aligned}\sigma(H_0^{(N)}) &= \sigma_{\mathrm{c}}(H_0^{(N)}) = \left\{ \sum_{j=1}^{N} \frac{\hbar^2 k_j^2}{2m_j} \middle| k_j \in \mathbb{R}^d, j = 1, \cdots, N \right\} \\ &= [0, \infty), \qquad (3.57)\\ \sigma_{\mathrm{p}}(H_0^{(N)}) &= \emptyset. \qquad (3.58)\end{aligned}$$

証明 定理 3.20 の証明と同様にして，演算子の等式

$$\mathcal{F}_{dN} P_{j\alpha}^{\mathrm{S}} \mathcal{F}_{dN}^{-1} = \hbar k_{j\alpha}, \quad j = 1, \cdots, N, \alpha = 1, \cdots, d, \tag{3.59}$$

が成立する（$\mathcal{F}_{dN}$ は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})$ 上のフーリエ変換；(3.27) を参照）．かけ算演算子 $\hbar k_{j\alpha}, j = 1, \cdots, N, \alpha = 1, \cdots d,$ は強可換であるから，補題 3.27(i) により，$P_{j\alpha}^{\mathrm{S}}, j = 1, \cdots, N, \alpha = 1, \cdots, d,$ は強可換である．したがって，命題 3.25 によって，定理の主張の前半が得られる．(3.59) は

$$\mathcal{F}_{Nd} H_0^{(N)} \mathcal{F}_{Nd}^{-1} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\hbar^2 k_j^2}{2m_j} \tag{3.60}$$

を意味する．したがって，スペクトルのユニタリ不変性と定理 2.28 によって，(3.57), (3.58) が得られる． □

3.4.3 相対論的ハミルトニアン—ディラック演算子

すでに，注意しておいたように，正準量子化は，作業仮説としては，相対論的な場合にも適用されうる．そこで，相対論的な場合のハミルトニアンはどのようになるかを次に考察しよう．

相対論では，自由粒子のエネルギー $E \in \mathbb{R}$ と 3 次元運動量 $p \in \mathbb{R}^3$ は，ひとつの組 (E, p)（ローレンツ変換にしたがう 4 元ベクトル）として意味をもち，成分の間には

$$E^2 = p^2 + m^2 \tag{3.61}$$

という関係式が成り立つ．ここで，m は粒子の静止質量を表わす*24．したがって，

$$E = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$$

となる．

古典論では，負のエネルギー $-\sqrt{p^2 + m^2}$ は非物理的であるとして，考慮されないのが普通である．この場合には，正準量子化のハミルトニアンは

$$H_+ := (-\hbar^2 \Delta + m^2)^{1/2} \tag{3.62}$$

*24 光速 $c = 1$ の単位系を用いる．c を入れた場合は，エネルギーと運動量の関係は $E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$ である．

であたえられることになる．ここで，Δ は 3 次元の一般化されたラプラシアンであり，右辺の演算子は非負自己共役演算子 $-\hbar^2\Delta+m^2$ の平方根である（2.10 節の終わりの部分を参照）*25．演算子 H_+ は**相対論的シュレーディンガー演算子**とよばれることがある．非負自己共役演算子 $-\Delta$ のスペクトル測度を $E_{-\Delta}$ とすれば，演算子解析により，

$$H_+ = \int_{[0,\infty)} \sqrt{\hbar^2\lambda+m^2}\,dE_{-\Delta}(\lambda) \tag{3.63}$$

と表わされる（$\operatorname{supp} E_{-\Delta}=\sigma(-\Delta)\subset[0,\infty)$ に注意）．

演算子 H_+ をもっと陽に表わすために，そのフーリエ変換を考えてみよう．実際，H_+ のフーリエ変換に関して，

$$\mathcal{F}_3 H_+ \mathcal{F}_3^{-1} = \sqrt{\hbar k^2+m^2} \tag{3.64}$$

が成り立つ（$k=(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{R}^3$ はフーリエ変換の変数）．これは次のようにしてわかる．$E_{-\Delta}$ のフーリエ変換

$$\widehat{E}_{-\Delta}(B) := \mathcal{F}_3 E_{-\Delta}(B)\mathcal{F}_3^{-1} \tag{3.65}$$

を考えると，これは

$$(\widehat{E}_{-\Delta}(B)\psi)(k) = \chi_{\{k\in\mathbb{R}^3|k^2\in B\}}(k)\psi(k),\ B\in\mathsf{B}^3, \psi\in\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3_k), \tag{3.66}$$

となることがわかる．したがって，任意の $\phi\in\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3_k)$ と $\psi\in\mathsf{D}(\sqrt{\hbar^2k^2+m^2})$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle\phi,\mathcal{F}_3H_+\mathcal{F}_3^{-1}\psi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\hbar^2\lambda+m^2}\,d\langle\phi,\widehat{E}_{-\Delta}(\lambda)\psi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \sqrt{\hbar^2k^2+m^2}\,\phi(k)^*\psi(k)dk.\end{aligned}$$

ゆえに，(3.64) が得られる．

(3.64) から，

$$(H_+\psi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{ikx}\sqrt{\hbar^2k^2+m^2}\,\hat{\psi}(k)dk, \quad \psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3_x), \tag{3.67}$$

*25 一般に，ヒルベルト空間 H 上の任意の自己共役演算子 A と任意の実数 a,b に対して，$B:=aA+b$ は自己共役である（第 2 章，章末演習問題 23）．

が成立することがわかる．

ところで，量子力学においては，正のエネルギーと負のエネルギーの状態は互いに遷移しうることを考慮する必要がある．それゆえ，(3.62) のハミルトニアンだけを考えるのでは十分ではない可能性がある．これに加えて，演算子 H_+ は，通常の意味での偏微分演算子ではないということもある．実際，(3.67) の型の演算子は**擬微分演算子** (pseudo-differential operator) とよばれる種類の演算子である．

そこで，相対論的なハミルトニアンの候補として

$$H^2 = -\hbar^2\Delta + m^2 \tag{3.68}$$

となる自己共役演算子 H で 1 階の偏微分演算子で表現されるものを求める問題を考えてみよう．これは，いわば，演算子 $-\hbar^2\Delta + m^2$ を，ある種の条件をみたすような仕方で，“因数分解” する問題にほかならない．

まず，発見法的な議論をしよう．H は 1 階の偏微分演算子で表現されるということが基本前提であるから，

$$H = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j \hat{p}_j + \alpha_0 \tag{3.69}$$

という形を仮定しよう．ここで，$\hat{p}_j = -i\hbar D_j$ である．α_μ，$\mu = 0, 1, 2, 3,$ は未定定数であるが，非可換な量であってもよいことにする．また，α_μ と $\hat{p}_j$ は形式的に可換であるとする．このとき

$$H^2 = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j^2 \hat{p}_j^2 + \sum_{1\le j<k\le 3} \{\alpha_j, \alpha_k\}\hat{p}_j\hat{p}_k + \sum_{j=1}^{3}\{\alpha_j, \alpha_0\}\hat{p}_j + \alpha_0^2$$

となる．ここで，$\{\cdot\,,\,\cdot\}$ は反交換子である．したがって，これが (3.68) の右辺に等しくなるための必要十分条件は

$$\{\alpha_j, \alpha_k\} = 2\delta_{jk}, j, k = 1, 2, 3, \tag{3.70}$$

$$\{\alpha_j, \alpha_0\} = 0, j = 1, 2, 3, \tag{3.71}$$

$$\alpha_0^2 = m^2, \tag{3.72}$$

であることがわかる．これらの関係式をみたす α_μ は，明らかに，普通の数ではあり得ない．α_0 の代わりに

$$\beta = \frac{\alpha_0}{m}$$

を導入すれば，(3.71), (3.72) は

$$\{\alpha_j, \beta\} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \tag{3.73}$$

$$\beta^2 = 1, \tag{3.74}$$

と書き直せる．

ところで，代数関係式 (3.70), (3.73), (3.74) をみたす代数的な量の組 $\{\alpha_j\}_{j=1}^3$, β から生成される代数は 4 次元ユークリッド空間上の**クリフォード** (Clifford) **代数**とよばれる．こうして，$-\hbar^2\Delta + m^2$ の因数分解から，クリフォード代数へと導かれる．もちろん，このような代数の表現が存在すること，すなわち，(3.70), (3.73), (3.74) をみたす $\{\alpha_j\}_{j=1}^3$, β がベクトル空間上の線形演算子として実現されることを示さなければならない．これは次のようにしてなされる．

2 行 2 列の行列 $\sigma_j, j = 1, 2, 3$ を次のように定義する．

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.75}$$

これらは**パウリ** (Pauli) **行列**とよばれる．容易に確かめられるように，σ_j はエルミート行列であり，

$$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2, \tag{3.76}$$

$$\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3, \tag{3.77}$$

をみたす．パウリ行列から，4 行 4 列のエルミート行列

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & -\sigma_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3, \tag{3.78}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.79}$$

をつくる．ただし，行列の中の 0, 1 は，それぞれ，2 行 2 列の零行列，単位行列を表わす．このとき，(3.76), (3.77) によって，これらの行列は，関係式 (3.70), (3.73), (3.74) をみたす．

以下，本質的ではないが，簡単のため，α_j, β は，それぞれ，(3.78), (3.79) によってあたえられるものとする*26.

こうして，求める演算子 H の候補は

$$H_D := -i\hbar \sum_{j=1}^{3} \alpha_j D_j + m\beta \tag{3.80}$$

であることがわかった．この演算子が作用するヒルベルト空間としては，$\mathbb{R}^3$ 上の，$\mathbb{C}^4$ に値をとる 2 乗可積分関数の空間

$$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4) := \left\{ \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \middle| \psi_k \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3), \quad k = 1,2,3,4 \right\} \tag{3.81}$$

をとるのが自然である．この空間の内積は

$$\langle \psi, \phi \rangle = \sum_{k=1}^{4} \langle \psi_k, \phi_k \rangle_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)} \tag{3.82}$$

によって定義される．したがって，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)$ は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ の 4 個の直和にほかならない：

$$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4) = \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3) \bigoplus \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3) \bigoplus \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3) \bigoplus \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3). \tag{3.83}$$

ゆえに，確かに，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)$ はヒルベルト空間である．

$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ 上の任意の演算子 A から，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)$ 上の演算子 $\widetilde{A}$ が次のように定

*26 以下の議論は，上述のクリフォード代数の任意の有限次元表現で可能である．

義される：

$$\mathsf{D}(\widetilde{A}) := \mathsf{D}(A) \bigoplus \mathsf{D}(A) \bigoplus \mathsf{D}(A) \bigoplus \mathsf{D}(A)$$
$$:= \left\{ \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \middle| \psi_j \in \mathsf{D}(A), \quad j = 1,2,3,4 \right\},$$
$$\widetilde{A}\psi := \begin{pmatrix} A\psi_1 \\ A\psi_2 \\ A\psi_3 \\ A\psi_4 \end{pmatrix}.$$

以後，$\widetilde{A}$ も A と記すことにする．こうしても，どこのヒルベルト空間で考えているかをはっきり意識していれば混乱は生じないであろう．

演算子 H_D の定義域は，

$$\mathsf{D}(H_D) = \left\{ \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \middle| \psi_k \in \cap_{j=1}^3 \mathsf{D}(D_j), \quad k = 1,2,3,4 \right\} \quad (3.84)$$

であり，作用は

$$H_D\psi = -i\hbar \sum_{j=1}^{3} \alpha_j D_j \psi + m\beta\psi \quad (3.85)$$

であたえられる．このようにして定義される演算子 H_D を**自由なディラック演算子** (free Dirac operator) あるいは**自由なディラック ハミルトニアン**とよぶ．

ディラック演算子の基本的性質を明らかにしておこう．

補題 3.29 任意の $\psi \in \mathsf{D}(H_D)$ に対して

$$\|H_D\psi\|^2 = \hbar^2 \sum_{j=1}^{3} \|D_j\psi\|^2 + m^2\|\psi\|^2. \quad (3.86)$$

が成り立つ．

証明 $\psi \in \mathsf{D}(H_D)$ に対して,

$$K(\psi) = \sum_{j=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\langle D_j\psi, \alpha_j\alpha_l D_l\psi\rangle$$

とおく．行列 α_j, β のエルミート性（これらは，明らかな仕方で，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)$ 上の有界な自己共役演算子とみなされる）と (3.73), (3.74) を使うと

$$\begin{aligned}\|H_D\psi\|^2 &= \hbar^2 K(\psi) - i\hbar m\sum_{j=1}^{3}\langle\psi, \{\alpha_j, \beta\}D_j\psi\rangle + m^2\langle\psi, \beta^2\psi\rangle \\ &= \hbar^2 K(\psi) + m^2\|\psi\|^2\end{aligned}$$

と変形できる．(3.70) によって,

$$K(\psi) = 2\sum_{j=1}^{3}\|D_j\psi\|^2 - \sum_{j=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\langle D_j\psi, \alpha_l\alpha_j D_l\psi\rangle.$$

一方，$\mathcal{F}_3(-iD_j)\mathcal{F}_3^{-1} = k_j$ であるから,

$$\begin{aligned}\langle D_j\psi, \alpha_l\alpha_j D_l\psi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} k_j k_l\langle\hat{\psi}(k), \alpha_l\alpha_j\hat{\psi}(k)\rangle_{\mathbb{C}^4}dk \\ &= \int_{\mathbb{R}^3}\langle k_l\hat{\psi}(k), \alpha_l\alpha_j k_j\hat{\psi}(k)\rangle_{\mathbb{C}^4}dk \\ &= \langle D_l\psi, \alpha_l\alpha_j D_j\rangle.\end{aligned}$$

したがって,

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\langle D_j\psi, \alpha_l\alpha_j D_l\rangle = \sum_{j=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\langle D_l\psi, \alpha_l\alpha_j D_j\rangle = K(\psi).$$

ゆえに，$2K(\psi) = 2\sum_{j=1}^{3}\|D_j\psi\|^2$．すなわち，$K(\psi) = \sum_{j=1}^{3}\|D_j\psi\|^2$．よって，(3.86) が得られる． □

定理 3.30 自由なディラック演算子 H_D は自己共役であり，演算子の等式

$$H_D^2 = -\hbar^2\Delta + m^2 \tag{3.87}$$

が成立する．さらに

$$\sigma(H_D) = (-\infty, -m] \cup [m, \infty), \tag{3.88a}$$

$$\sigma_{\mathrm{p}}(H_D) = \emptyset. \tag{3.88b}$$

証明 $\mathsf{D}(H_D)$ は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$ で稠密な部分空間

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)^4 := \left\{ \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \middle| \psi_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3), k = 1, 2, 3, 4 \right\} \tag{3.89}$$

を含むので，H_D は稠密に定義された演算子である．さらに，H_D が対称演算子であることも容易にわかる．$\mathcal{F}_3$ を 3 次元のフーリエ変換とすれば，

$$\mathsf{D}(H_D) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4) | \mathcal{E}_D \mathcal{F}_3 \psi \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)\}, \tag{3.90a}$$

$$(\mathcal{F}_3(H_D \pm i)\mathcal{F}_3^{-1}\psi)(k) = (\mathcal{E}_D(k) \pm i)\hat{\psi}(k), \psi \in \mathsf{D}(H_D) \tag{3.90b}$$

が成立する．ここで

$$\mathcal{E}_D(k) = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j \hbar k_j + m\beta. \tag{3.91}$$

補題 3.29 と同様にして

$$\mathcal{E}_D(k)^2 = \hbar^2 k^2 + m^2$$

が示される．各 $k \in \mathbb{R}^3$ に対して，$\mathcal{E}_D(k)$ はエルミート行列であって，

$$\begin{aligned}(\mathcal{E}_D(k) + i)(\mathcal{E}_D(k) - i) &= \mathcal{E}_D(k)^2 + 1 \\ &= \hbar^2 k^2 + m^2 + 1\end{aligned}$$

である．したがって，行列 $\mathcal{E}_D(k) \pm i$ は正則であって，

$$(\mathcal{E}_D(k) \pm i)^{-1} = (\mathcal{E}_D(k) \mp i)(\hbar k^2 + m^2 + 1)^{-1}$$

が成り立つ．ゆえに，任意の $\psi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)$ に対して，

$$\eta(k) := (\mathcal{E}_D(k)+i)^{-1}(\mathcal{F}_3\psi)(k) = (\mathcal{E}_D(k)-i)(\hbar k^2+m^2+1)^{-1}(\mathcal{F}_3\psi)(k)$$

とすれば，$\widetilde{\eta} := \mathcal{F}_3^{-1}\eta \in \mathsf{D}(H_D)$ であり，$(H_D+i)\widetilde{\eta} = \psi$ が成り立つ．したがって，H_D+i は全射である．同様に H_D-i も全射であることがわかる．したがって，定理 2.41 によって，H_D は自己共役である．

補題 3.29 と偏極恒等式により，

$$\langle H_D\psi, H_D\phi\rangle \;=\; \sum_{j=1}^{3}\langle -i\hbar D_j\psi, -i\hbar D_j\phi\rangle + m^2\langle\psi,\phi\rangle, \quad \psi,\phi\in\mathsf{D}(H_D),$$

が成り立つ．$\mathsf{D}(\Delta)\subset\mathsf{D}(H_D)$ であることは容易にわかる．したがって，$\phi\in\mathsf{D}(\Delta)$ ならば

$$\langle H_D\psi, H_D\phi\rangle = \langle\psi,(-\hbar^2\Delta+m^2)\phi\rangle.$$

これがすべての $\psi\in\mathsf{D}(H_D)$ に対して成り立つから，$H_D\phi\in\mathsf{D}(H_D)$ であって，$H_D^2\phi = (-\hbar^2\Delta+m^2)\phi$ となる．これは，$-\hbar^2\Delta+m^2\subset H_D^2$ を意味する．この両辺とも自己共役であるから，実は，それらは，演算子として，等しくなければならない．したがって，(3.87) を得る．

(3.88a) を示すために，まず，任意の $\lambda\in(-m,m)$ が，H_D のレゾルヴェント集合 $\varrho(H_D)$ に入ることを示す．(3.87) により

$$(H_D-\lambda)(H_D+\lambda) = (H_D+\lambda)(H_D-\lambda) = -\hbar^2\Delta+m^2-\lambda^2. \quad (3.92)$$

いまの場合，$m^2-\lambda^2>0$ であるから，(3.57) により，$\lambda^2-m^2\in\varrho(-\hbar^2\Delta)$ である．したがって，$-\hbar^2\Delta+m^2-\lambda^2$ は全単射である．ゆえに，(3.92) は $H_D-\lambda$ の全単射性を意味する．したがって，$\lambda\in\varrho(H_D)$ を得る．

次に $(-\infty,-m]\cup[m,\infty)\subset\sigma(H_D)$ を示すために，行列

$$u_D := \alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta$$

を導入する．(3.70), (3.73), (3.74) を用いると，u_D は，エルミートかつユニタリであり，

$$\{u_D, \alpha_j\} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad \{u_D, \beta\} = 0$$

をみたすことがわかる．これから，$\mathsf{D}(H_D)$ 上で，

$$\{u_D, H_D\} = 0$$

が示される．これは，演算子の等式

$$u_D H_D u_D^{-1} = -H_D$$

を導く．これから，$\sigma(H_D)$ および $\varrho(H_D) \cap \mathbb{R}$ は，$\mathbb{R}$ の原点 0 に関して左右対称な集合であることが結論される (i.e., $\lambda \in \sigma(H_D) \iff -\lambda \in \sigma(H_D)$; $\lambda \in \varrho(H_D) \cap \mathbb{R} \iff -\lambda \in \varrho(H_D) \cap \mathbb{R}$.

さて，仮に，$\lambda \geq m$ が $\varrho(H_D)$ に属するとしよう．すると今述べた事実により，$-\lambda \in \varrho(H_D)$．したがって，$H_D \pm \lambda$ は全単射である．これは，$A := (H_D - \lambda)(H_D + \lambda)$ が全単射であることを意味する．一方，$A = H_D^2 - \lambda^2 = -\hbar^2\Delta + m^2 - \lambda^2$．したがって，$-\hbar^2\Delta - (\lambda^2 - m^2)$ が全単射であることになる．しかし，$\lambda^2 - m^2 \geq 0$ は $-\hbar^2\Delta$ のスペクトルの点であるから，矛盾が生じる．よって，$\lambda \in \sigma(H_D)$ であるから，$[m, \infty) \subset \sigma(H_D)$．これと $\sigma(H_D)$ の（原点に関する）左右対称性により，$(-\infty, -m] \cup [m, \infty) \subset \sigma(H_D)$．この結果とすでに証明した事実 $(-m, m) \subset \varrho(H_D)$ をあわせれば，(3.88a) が得られる．(3.88b) もフーリエ変換に移って考えれば容易に証明される．　□

定理 3.30 によれば，H_D のスペクトルは下にも上にも有界ではなく，原点に関して対称的である．しかも，$\sigma(H_D)$ は，ちょうど，古典論でのエネルギー $\pm\sqrt{p^2 + m^2}$ のとりうる値の全体に等しい．

相対論的に考えたことのひとつの結果として，状態のヒルベルト空間の構造が変化したということがあげられる．すなわち，非相対論的な場合は，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ であったが，ここに述べた相対論的な場合の例では，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$ になったということである．ここに現われた，$\mathbb{C}^4$ という空間で表わされる余分な自由度は，後に説明するとおり素粒子のスピンと反粒子の自由度を表現するものである．

3.4.4　角 運 動 量

古典力学において，運動量やハミルトニアンと並ぶ重要な物理量として，角運動量がある．ここでは，簡単のため，上の古典力学系の例で $N=1, d=3$ の場合，すなわち，3 次元空間を運動する 1 粒子系を考える．$x=(x_1,x_2,x_3), p=(p_1,p_2,p_3)\in\mathbb{R}^3$ のように記す．このとき，古典的な角運動量は，ベクトル x と p のベクトル積（外積）

$$\begin{aligned} \mathsf{L}_{\mathrm{cl}} :&= x\times p \\ &= (x_2p_3-x_3p_2, x_3p_1-x_1p_3, x_1p_2-x_2p_1) \end{aligned} \tag{3.93}$$

によって定義される．したがって，正準量子化の処方によれば，量子系の角運動量を

$$L=(L_1,L_2,L_3) \tag{3.94}$$

とするとき，その成分 L_j, $j=1,2,3$ は

$$L_1 = Q_2P_3-Q_3P_2, \tag{3.95a}$$

$$L_2 = Q_3P_1-Q_1P_3, \tag{3.95b}$$

$$L_3 = Q_1P_2-Q_2P_1, \tag{3.95c}$$

$$\mathsf{D}(L_j) = \mathsf{D}, j=1,2,3,$$

によって定義するのが自然である．$j\neq k$ ならば，D 上で，Q_j と P_k は可換であるから，上の定義にあいまいさはない．各 L_j が対称演算子であることはただちにわかる．

Q_j, P_j に対する CCR を用いると，角運動量の成分は D 上で巡回的な美しい交換関係

$$[L_1,L_2]=i\hbar L_3,\quad [L_2,L_3]=i\hbar L_1,\quad [L_3,L_1]=i\hbar L_2, \tag{3.96}$$

をみたすことがわかる．したがって，角運動量の異なる成分どうしは可換ではない．

CCR の表現 $\{Q_j, P_j\}_{j=1}^3$ として，自由度 3 のシュレーディンガー表現をとり，この場合の L を

$$L^{\mathrm{S}} = (L_1^{\mathrm{S}}, L_2^{\mathrm{S}}, L_3^{\mathrm{S}}) \tag{3.97}$$

と書くことにすれば，

$$L_1^{\mathrm{S}} = \hat{x}_2\hat{p}_3 - \hat{x}_3\hat{p}_2 = -i\hbar(\hat{x}_2 D_3 - \hat{x}_3 D_2), \tag{3.98a}$$

$$L_2^{\mathrm{S}} = \hat{x}_3\hat{p}_1 - \hat{x}_1\hat{p}_3 = -i\hbar(\hat{x}_3 D_1 - \hat{x}_1 D_3), \tag{3.98b}$$

$$L_3^{\mathrm{S}} = \hat{x}_1\hat{p}_2 - \hat{x}_2\hat{p}_1 = -i\hbar(\hat{x}_1 D_2 - \hat{x}_2 D_1), \tag{3.98c}$$

となる．これらは，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ 上の演算子として，$\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上で本質的に自己共役であることが示される．この証明は続編『量子物理の数理』で行なう．

3.4.5 ヴァイルの量子化と非可換幾何学

$F(x,p)$ を $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上の実数値関数とする．これが古典的な物理量を表わすとき，これに対応する量子系の演算子を定義する方法として**ヴァイル** (Weyl) **の量子化**とよばれるものがある．これは，

$$(F_{\mathrm{QM}}\psi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} dk \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{ik(x-y)} F\left(\frac{x+y}{2}, \hbar k\right)\psi(y)dy\right)$$

によって演算子 F_{QM} を定義し（$\psi \in \mathsf{D}(F_{\mathrm{QM}}) := \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$；ただし，右辺の積分がすべての $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して存在する場合に限られる），もし，それが本質的に自己共役ならば，その閉包でもって，F に対応する，量子系の演算子を定義しようとするものである．容易にわかるように，$F(x,p) = x_j$ または $F(x,p) = p_j$ の場合，それぞれ，$F_{\mathrm{QM}} = \hat{x}_j \restriction \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, $F_{\mathrm{QM}} = \hat{p}_j \restriction \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ となる．一般の F に対しては，付加的な条件のもとで，F_{QM} は対称演算子であることが示される．たとえば，$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{ess.sup}_{x\in\mathbb{R}^d}|F(x,p)|dp < \infty$ ならば，任意の $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$|F((x+y)/2, \hbar k)|\,|\psi(y)|$ は $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上のルベーグ測度 $dk\,dy$ について可積分であるので，上式の右辺の積分順序は交換できる．これを使えば，F_{QM} が対称であることは容易にわかる．

いま述べた事実からわかるように，ヴァイルの量子化は，CCR のシュレーディンガー表現を通して，量子系の物理量を定義する仕方の一般的な処方のひ

とつと見ることができる．演算子 F_{QM} の型をした演算子は**ヴァイル型の擬微分演算子**とよばれる[*27]．

ヴァイル量子化の方法は，（シュレーディンガー表現とは限らない）一般のCCR の表現の場合へと拡張できる [R. F. V. Anderson, *The Weyl functional calculus*, J. Funct. Anal. **4**(1969), 240–267].

古典的物理量は，実数値関数で表わされるから，古典的物理量によって生成される代数は可換な代数をなす．したがって，古典的な物理量から量子力学的な物理量をつくるという操作あるいは対応は，代数的には，可換的な対象を**非可換化**する手続きであるとみなせる．これは，数学的には，古典的物理量によって生成される代数から，ヒルベルト空間上の演算子の全体の中への写像で CCR の表現をあたえるものを定義することにほかならない．このような写像で“よい性質”をもつものは数学的にも物理的にも興味があると予想される．量子力学のモデルをあたえるというのは，最も抽象的には，そのような写像を構成することであるともいえる．Weyl の量子化法（上述の対応 $F \to F_{\mathrm{QM}}$）は，この意味で，量子力学のひとつの標準的なモデルとみなせる（ただし，これは，CCR のシュレーディンガー表現に伴うものである）．

古典的物理量の代数は，それが定義されている多様体の幾何学的性質を担っている．したがって，古典的物理量の代数の非可換化である，量子力学的物理量の集合を研究することは，ある種の**非可換幾何学**を構成することに相当すると考えられる．こうして，量子力学というのは，数学的には非可換幾何学の一種とみなせる．この観点から量子化をとらえようとする最近の研究については，V. V. Kisil and E. Ramire de Arellano, *A functional model for quantum mechanics: unbounded operators*, Math. Meth. Appl. Sci. **20**(1997), 745–757, とそこに引用されている文献を，また，非可換幾何学そのものについては，A. Connes, “Noncommutative Geometry”, Academic Press, 1994, を参照されたい．

[*27] この型の演算子についての詳しい研究は，たとえば，L. Hörmander: *The Weyl calculus of pseudo-differential operators*, Commun. Pure Appl. Math. **32**(1979), 359–443, に見られる．

3.4.6 自己共役性の問題

量子力学の公理 QM2 によれば，物理量は自己共役演算子で表わされなければならない．ところで，上の例で見たように，古典的な物理量から，正準量子化によって形式的にあたえられる演算子はさしあたっては対称演算子であることしかわからないのが普通である．それらの演算子が実際に量子系の物理量であることを保証するには，それらが自己共役であること，あるいは適当な自己共役演算子の拡大をもつことを示す必要がある（後者の場合，この拡大でもって，当該の物理量を定義する）．自由ハミルトニアンの場合は，確かに公理 QM2 の要請がみたされていることを見た（定理 3.28, 定理 3.30）．だが，たとえば，$V \neq 0$ の場合のシュレーディンガー演算子 H_{S} の自己共役性を証明することは全然自明な問題ではなく，優れて数学的な問題である．正準量子化の対応によって得られる，量子系の演算子の自己共役性を証明する問題は，量子力学の数理物理における重要な問題のひとつであって，**自己共役性の問題**とよばれている．この問題については続編『量子物理の数理』で詳しく論じることにする．

3.5 状態の時間発展—シュレーディンガーの描像

この節では，量子力学系の状態の時間発展について考察し，これを支配する方程式を導く．

3.5.1 ヒルベルト空間値関数

量子系の状態のヒルベルト空間を H とし，時刻を実数パラメーター t によって表わす．一般に，量子系の状態が時間発展するということは，それを表わす状態ベクトルが，時刻 t の変化に応じて，H の中を動くことを意味する（図 3.3）．このことを 数学的に言えば，状態の時間発展は，$\mathbb{R}$ から H への写像 $\Psi : t \to \Psi(t)$ によって記述されるということである．このような写像を，値を H の中にとる関数という意味で，$\mathbb{R}$ 上の **H-値関数**とよぶ．

例 3.5 $\Psi_j \in$ H, $j = 1, \cdots, n$, とし，$f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $j = 1, \cdots, n$, とすれば，写像：$t \to \Psi(t) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t)\Psi_j$, は H-値関数である．

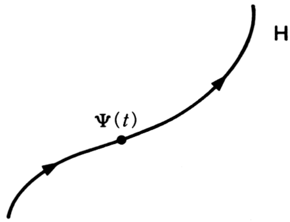


図 3.3 状態の時間発展

一般に，空でない集合からヒルベルト空間への写像を総称して**ヒルベルト空間値関数** (Hilbert space-valued function) という．

$\mathbb{R}$ 上のヒルベルト空間値関数の解析に必要ないくつかの概念を定義しておこう．

H をヒルベルト空間とする．これまでは，ヒルベルト空間の位相として，ノルムによる位相だけを扱ってきた．だが，次に述べるように，これ以外の位相も考えることができる．

$\{\Psi_n\}_n$ を H の点列，$\Psi \in$ H とする．すべての $\Phi \in$ H に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \langle \Phi, \Psi_n - \Psi \rangle = 0$$

のとき，Ψ_n は Ψ に**弱収束** (weak convergence) するという．この場合，Ψ を Ψ_n の**弱極限** (weak limit) といい，$\Psi = \text{w-}\lim_{n\to\infty} \Psi_n$ と記す．弱収束による位相を**弱位相** (weak topology) という．

H のノルムによる収束を弱位相と区別する意味で**強収束** (strong convergence) といい，$\|\Psi_n - \Psi\| \to 0$ のとき，

$$\text{s-}\lim_{n\to\infty} \Psi_n = \Psi$$

と記す．強収束による位相を**強位相** (strong topology) という．強収束列は弱収束列である．だが，次の例が示すように，この逆は一般には成立しない．

例 3.6 $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を H の任意の正規直交系とする（完全である必要はない）．このとき，第 1 章の (1.17) 式によって，$\text{w-}\lim_{n\to\infty} \Psi_n = 0$．すなわち，$\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は零ベクトルに弱収束する．だが，$\|\Psi_n - 0\| = 1$ であるから，$\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は零ベクトルに強収束はしない．

対応 $\mathbb{R} \ni t \to \Psi(t)$ を $\mathbb{R}$ 上の H-値関数としよう．$t_0 \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\text{s-}\lim_{\varepsilon \to 0} \Psi(t_0 + \varepsilon) = \Psi(t_0)$$

のとき，$\Psi(t)$ は $t = t_0$ において**強連続** (strongly continuous) であるという．I を $\mathbb{R}$ の閉区間または開区間とするとき，I の任意の点 t において $\Psi(t)$ が強連続のとき，$\Psi(t)$ は I 上で強連続であるという．

弱連続性も同様に定義される．すなわち，

$$\text{w-}\lim_{\varepsilon \to 0} \Psi(t_0 + \varepsilon) = \Psi(t_0)$$

のとき，$\Psi(t)$ は $t = t_0$ において**弱連続** (weakly continuous) であるといい，任意の $t \in I$ において $\Psi(t)$ が弱連続ならば，$\Psi(t)$ は，I 上で弱連続であるという．

容易にわかるように，$\Psi(t)$ が強連続ならば弱連続である．しかし，この逆は一般には成立しない（章末演習問題 1 を参照）．

強極限

$$\text{s-}\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Psi(t_0 + \varepsilon) - \Psi(t_0)}{\varepsilon}$$

が存在するとき，$\Psi(t)$ は $t = t_0$ で**強微分可能** (strongly differentiable) であるという．すべての $t \in I$ で $\Psi(t)$ が強微分可能のとき，$\Psi(t)$ は，I 上で強微分可能であるといい，

$$\text{s-}\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Psi(t + \varepsilon) - \Psi(t)}{\varepsilon} = \frac{d\Psi(t)}{dt} = \Psi'(t)$$

のように記し，これを，Ψ の**強微分** (strong derivative) とよぶ．

$\Psi(t)$ が I 上で強微分可能ならば，それは I 上で強連続である．実際，

$$\begin{aligned}
\|\Psi(t + \varepsilon) - \Psi(t)\| &= \left\| \varepsilon \frac{\Psi(t + \varepsilon) - \Psi(t)}{\varepsilon} \right\| \\
&= |\varepsilon| \left\| \frac{\Psi(t + \varepsilon) - \Psi(t)}{\varepsilon} \right\| \\
&\to 0 \cdot \left\| \frac{d\Psi(t)}{dt} \right\| = 0 \ (\varepsilon \to 0).
\end{aligned}$$

$T(\cdot)$ を $\mathbb{R}$ 上の $\mathfrak{B}(\mathsf{H})$-値関数，すなわち，$\mathbb{R}$ から $\mathfrak{B}(\mathsf{H})$ の写像 $T: t \to T(t) \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$ とする．任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，H-値関数 $T(t)\Psi$ が $\mathbb{R}$ 上で強（弱）連続のとき，$T(t)$ は $\mathbb{R}$ 上で強（弱）連続であるという[*28].

例 3.7 例 3.5 の H-値関数 $\Psi(t)$ について，次の (i), (ii) が成り立つ：(i) 各 f_j が $\mathbb{R}$ 上で連続ならば，$\Psi(t)$ は $\mathbb{R}$ 上で強連続である；(ii) 各 f_j が $\mathbb{R}$ 上で連続微分可能ならば，$\Psi(t)$ は $\mathbb{R}$ 上で強微分可能であり，

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} f'(t)\Psi_j.$$

3.5.2 強連続なヒルベルト空間値関数の積分

強連続な H-値関数 $\Psi(t)$ に対しては積分も考えることができる．その考え方は，複素数値連続関数のリーマン積分の考え方と同様である．$-\infty < a < b < \infty$ とし，区間 $[a, b]$ に対して，分割

$$\Pi: \ a = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = b$$

を考える．ξ_k を $(\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ の中の任意の点とし，リーマン和

$$S_n(\Psi) := \sum_{k=1}^{n} \Psi(\xi_k)(\lambda_k - \lambda_{k-1})$$

をつくる．このとき，複素数値連続関数のリーマン和の収束の場合と同様にして，$\text{s-}\lim_{\Pi \to 0} S_n(\Psi)$ は存在することが示される．この極限を H-値関数 $\Psi(\cdot)$ のリーマン積分とよび，記号的に $\int_a^b \Psi(t)dt$ と書く：

$$\int_a^b \Psi(t)dt := \lim_{\Pi \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Psi(\xi_k)(\lambda_k - \lambda_{k-1}).$$

この定義から，

$$\left\| \int_a^b \Psi(t)dt \right\| \le \int_a^b \|\Psi(t)\| dt \tag{3.99}$$

---

*28 ここでは,「強（弱）」は「強」すなわち「弱」という意味ではない．この種の定義の述べ方では，括弧内の言葉は，括弧内だけを通して読む．

が成り立つことがわかる．積分区間が無限区間の場合は，

$$\int_a^\infty \Psi(t)dt := \lim_{b\to\infty}\int_a^b \Psi(t)dt, \quad \int_{-\infty}^b \Psi(t)dt := \lim_{a\to-\infty}\int_a^b \Psi(t)dt,$$
$$\int_{-\infty}^\infty \Psi(t)dt := \lim_{a\to-\infty, b\to\infty}\int_a^b \Psi(t)dt,$$

のように定義する．これらは，もちろん，それぞれの右辺の極限が存在する場合に対してのみ定義される．これらが存在するための十分条件は，それぞれ，

$$\int_a^\infty \|\Psi(t)\|dt < \infty, \quad \int_{-\infty}^b \|\Psi(t)\|dt < \infty, \quad \int_{-\infty}^\infty \|\Psi(t)\|dt < \infty,$$

となることである．このような場合，積分は絶対収束であるという．ここではいちいち書かないけれども，ヒルベルト空間値関数についても通常の関数に対する微積分学の諸定理の多くが成立する．

3.5.3 状態の時間発展と強連続 1 パラメーターユニタリ群

さて，量子系の状態の時間発展の考察に入ろう．これに関する公理を定式化する前に，その背後にある発見法的な考え方を述べておく．いま量子系を任意にひとつ固定し，その状態のヒルベルト空間を H，この系の状態ベクトルが生成する部分空間を $\mathsf{D}_{\mathrm{phys}}$ とし，$\mathsf{D}_{\mathrm{phys}}$ は稠密であると仮定する．状態の時間発展は，状態ベクトルの時間発展としてとらえられるから，それは $\mathbb{R}$ 上の強連続なヒルベルト空間値関数 $\Psi(\cdot)$ で $\Psi(t) \in \mathsf{D}_{\mathrm{phys}}, t \in \mathbb{R}$, をみたすものによって記述されると仮定するのは自然である．したがって，描像としては，状態ベクトルは，時間がたつとともに，H 内の連続曲線（"軌道"）を描く (図 3.3)．時刻 $t=0$ での状態を Ψ とすれば，時刻 t での状態 $\Psi(t)$ は Ψ の変換とみることができる．したがって，ひとつの対応 $\Psi \to \Psi(t)$ が定まる．Ψ は $\mathsf{D}_{\mathrm{phys}}$ の任意のベクトルでよいから，系の状態の時間発展は，$\mathsf{D}_{\mathrm{phys}}$ からそれ自体の中への写像を定義することになる．この写像を $T(t)$ と書こう：$\Psi(t) = T(t)\Psi$．だが，さしあたって，$T(t)$ の線形性はまだ仮定しないことにする．量子系の状態が次のような仕方で時間発展すると仮定するのは，時間に関する並進不変性の観点から自然である：

(T) 系の時間発展は任意の状態間の相対的遷移確率を保存する．

ここで，二つの状態 Ψ, Φ の間の相対的遷移確率は $|\langle\Psi, \Phi\rangle|^2$ によって定義される (3.1.4 項で見たように，$|\langle\Psi, \Phi\rangle|^2/(\|\Psi\|^2\|\Phi\|^2)$ が Ψ, Φ の間の遷移確率)．したがって $\mathsf{D}_{\mathrm{phys}}$ の任意のベクトル Ψ, Φ に対して，

$$|\langle T(t)\Phi, T(t)\Psi\rangle| = |\langle\Phi, \Psi\rangle| \tag{3.100}$$

が成立する．さらに，$T(t)$ は H 全体を定義域とする写像に次のような仕方で拡張されるとしよう：$\mathsf{D}_{\mathrm{phys}}$ は稠密であるから，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，$\Psi_n \to \Psi\ (n \to \infty)$ となる $\Psi_n \in \mathsf{D}_{\mathrm{phys}}$ がとれる．このとき，$T(t)\Psi = \lim_{n\to\infty} T(t)\Psi_n$ が成り立つとする．この仮定があると，(3.100) はすべての $\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ に対して成り立つことになる．

このような性質をもつ写像 $T(t)$ に関する一般的性質を述べるために，言葉をいくつか用意する．

H から H への写像を H 上の写像という．S, T を（必ずしも線形であるとは限らない）H 上の写像とする．各 $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，実数 $\theta(\Psi)$ が存在して，

$$S\Psi = e^{i\theta(\Psi)}T\Psi, \quad \Psi \in \mathsf{H},$$

が成り立つならば，S と T は**ウィグナー** (Wigner) **同値**であるという．つまり，S と T がウィグナー同値であるというのは，S と T の作用が各ベクトルごとに位相因子（絶対値が 1 の定数）しか異ならないことをいうのである．また，ノルムを保存する (必ずしも線形ではない) 写像を**等長写像** (isometric mapping) という．

H 上の写像 $T : \mathsf{H} \to \mathsf{H}$ が**反線形** (anti-linear) であるとは，すべての $\Psi, \Phi \in \mathsf{H}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して

$$T(\alpha\Psi + \beta\Phi) = \alpha^* T\Psi + \beta^* T\Phi$$

が成り立つときをいう．T が反線形な等長写像ならば

$$\langle T\Psi, T\Phi\rangle = \langle\Psi, \Phi\rangle^*, \quad \Psi, \Phi \in \mathsf{H}$$

が成り立つ（偏極恒等式を用いよ）．

H 上の写像 U が反線形な等長写像で，$\mathsf{R}(U) = \mathsf{H}$ のとき，U は**反ユニタリ**であるという．

定理 3.31 ウィグナーの定理． H をヒルベルト空間，T を H 上の写像で内積の絶対値を保存するものとする．すなわち，

$$|\langle T\Phi, T\Psi\rangle| = |\langle \Phi, \Psi\rangle|, \quad \Psi, \Phi \in \mathsf{H},$$

をみたすとする．このとき，次の (i), (ii) が成立する．

(i) $\dim \mathsf{H} = 1$ ならば，T は，ある線形な等長変換 T_L および反線形な等長変換 T_A の両方にウィグナー同値である．

(ii) $\dim \mathsf{H} \geq 2$ ならば，T は，ある線形な等長変換 T_L または反線形な等長変換 T_A のどちらかにウィグナー同値である．

さらに，上の仮定に加えて，T が全射ならば（i.e., $\mathsf{R}(T) = \mathsf{H}$），(i), (ii) いずれの場合でも，$T_L, T_A$ はそれぞれ，ユニタリ変換，反ユニタリ変換である．

ウィグナーの定理は，量子力学における対称性の表現（群のユニタリ表現）を考察するうえで基礎となる重要な定理である．その要点は，写像 T の内積の絶対値の保存性だけから，ウィグナー同値の意味で，T の線形性あるいは反線形性が導かれることである．したがって，その証明には，ヒルベルト空間上の写像が線形性あるいは反線形性をもつ条件に対する注意深い考察が必要とされる．これは，ヒルベルト空間のある種の構造解析であり，それ自体としても興味がある．ウィグナーの定理の重要性に鑑み，以下に，やや長くなるが，この定理の完全な証明をあたえる*[29]．証明に興味のない読者は，この部分をとばして読んでも差し支えない．

ウィグナーの定理の証明の論理的構造をわかりやすくするために，まず，補題をいくつか用意する．

D をヒルベルト空間 H の部分空間とし，A を D からヒルベルト空間 K への写像とする．もし，すべての $\Psi, \Phi \in \mathsf{D}$ に対して，$A(\Psi + \Phi) = A\Psi + A\Phi$ が成立するならば，A は D 上で**加法的** (additive) であるという．

---

*[29] C. S. Sharm and D. F. Almeida: *A direct proof of Wigner's theorem on maps which preserve transition probabilities between pure states of quantum systems*, Ann.Phys. (NY) **197**(1990), 300–309, による．

補題 3.32　A は次の二つの条件をみたす，H 上の写像とする：

(i)　H の任意の 1 次元部分空間上で加法的である．

(ii)　H の互いに直交する，任意の二つのベクトル Ψ, Φ に対して，$A(\Psi+\Phi) = A\Psi + A\Phi$.

このとき，A は H 上で加法的である．

証明　任意の零でないベクトル $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，条件 (i) によって，

$$A(0_{\mathsf{H}} + \Psi) = A(0 \cdot \Psi + \Psi) = A(0 \cdot \Psi) + A\Psi = A0_{\mathsf{H}} + A\Psi.$$

同様に，$A(0_{\mathsf{H}} + 0_{\mathsf{H}}) = A(0 \cdot \Psi + 0 \cdot \Psi) = A0_{\mathsf{H}} + A0_{\mathsf{H}}$.

次に，Ψ, Φ を H の任意の零でないベクトルとする．もし，Ψ と Φ が一次従属ならば，$\Psi = \alpha\Phi$ となる $\alpha \neq 0$ が存在する．したがって，条件 (i) によって，$A(\Psi + \Phi) = A(\alpha\Phi + \Phi) = A(\alpha\Phi) + A\Phi = A\Psi + A\Phi$. Ψ と Φ が一次独立ならば，グラム-シュミットの直交化により，Ψ と直交するベクトル Ψ' があって，$\Phi = \alpha\Psi + \beta\Psi'$ と表わされる（$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ は定数）．したがって，仮定 (ii) を使って，

$$\begin{aligned} A(\Psi + \Phi) &= A(\Psi + \alpha\Psi + \beta\Psi') = A(\Psi + \alpha\Psi) + A(\beta\Psi') \\ &= A\Psi + A(\alpha\Psi) + A(\beta\Psi') = A\Psi + A(\alpha\Psi + \beta\Psi') \\ &= A\Psi + A\Phi. \end{aligned}$$

以上から，A は H 上で加法的であることがわかる．　□

ベクトル $\Psi \in \mathsf{H}$ によって生成される部分空間を H_Ψ で表わす:

$$\mathsf{H}_\Psi := \{\alpha\Psi | \alpha \in \mathbb{C}\}. \tag{3.101}$$

補題 3.33　A を H 上の加法的写像とする．Ψ, Φ を H の互いに直交する，零でないベクトルとする．もし，A の H_Ψ への制限は線形であり，A の H_Φ への制限は反線形であるならば，A は内積の絶対値を保存しない．

証明　仮に A は内積の絶対値を保存するとしてみよう．したがって，

$$\langle A\Psi, A\Phi \rangle = 0, \|A\Psi\|^2 = \|\Psi\|^2, \|A\Phi\|^2 = \|\Phi\|^2,$$

が成り立つ．これらと，仮定された条件を用いて，次のように式変形する：

$$\begin{aligned}\|\Psi\|^2+\|\Phi\|^2 &= |\langle i(\Psi+\Phi),(\Psi+\Phi)\rangle| = |\langle A(i(\Psi+\Phi)),A(\Psi+\Phi)\rangle| \\ &= |\langle iA\Psi-iA\Phi,A\Psi+A\Phi\rangle| = \left|\|\Psi\|^2-\|\Phi\|^2\right|.\end{aligned}$$

これは，$\Psi=0$ または $\Phi=0$ を意味するので，矛盾である． □

補題 3.34 A を H 上の加法的写像で内積の絶対値を保存するものとする．さらに，A を任意の 1 次元部分空間に制限したものは，線形か反線形のどちらかであるとする．このとき，A は H 全体で，線形か反線形のどちらかである．

証明 任意の $\Psi,\Phi\in\mathsf{H}$ と $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ に対して，A の加法性により，$A(\alpha\Psi+\beta\Phi)=A(\alpha\Psi)+A(\beta\Phi)$．いま，$\Psi\neq0$ とし，A の H_Ψ への制限が線形であるとする．Φ と Ψ が一次従属ならば，$\Phi=\gamma\Psi$ として一般性を失わない．このとき，

$$A(\alpha\Psi+\beta\Phi)=\alpha A\Psi+\beta A(\gamma\Psi)=\alpha A\Psi+\beta A\Phi.$$

Φ と Ψ が一次独立ならば，補題 3.32 の証明におけるようなベクトル Ψ' がとれる．補題 3.33 によって，A の $\mathsf{H}_{\Psi'}$ への制限も線形である．したがって，任意の $\lambda\in\mathbb{C}$ に対して，

$$A(\lambda\Phi)=A(\lambda\alpha\Psi+\lambda\beta\Psi')=\lambda(\alpha A\Psi+\beta A\Psi')=\lambda A\Phi.$$

ゆえに，A の H_Φ への制限は線形である．よって，$A(\alpha\Psi+\beta\Phi)=\alpha A(\Psi)+\beta A(\Phi)$．こうして，$A$ は線形であることがわかる．同様にして，A の H_Ψ への制限が反線形ならば，A は反線形であることが導かれる． □

補題 3.35 D を H の部分集合，$A:\mathsf{D}\to\mathsf{H}$ を内積の絶対値を保存する写像とする．D のベクトル Ψ,Φ と複素数 α,β が条件 $\alpha\Psi+\beta\Phi\in\mathsf{D},\Psi\perp\Phi,$ をみたしているとする．このとき，$|\alpha'|=|\alpha|,|\beta'|=|\beta|,$

$$A(\alpha\Psi+\beta\Phi)=\alpha' A\Psi+\beta' A\Phi \tag{3.102}$$

をみたす複素数 α',β' が存在する．

証明 A は内積の絶対値を保存するので，$A\Psi \perp A\Phi$ である．したがって，α', β' を複素数とするとき，

$$
\begin{aligned}
&\| A(\alpha\Psi + \beta\Phi) - (\alpha' A\Psi + \beta' A\Phi) \|^2 \\
&= (|\alpha|^2 + |\alpha'|^2)\|\Psi\|^2 + (|\beta|^2 + |\beta'|^2)\|\Phi\|^2 \\
&-\alpha' \langle A(\alpha\Psi + \beta\Phi), A\Psi\rangle - \beta' \langle A(\alpha\Psi + \beta\Phi), A\Phi\rangle \\
&-\alpha'^* \langle A\Psi, A(\alpha\Psi + \beta\Phi)\rangle - \beta'^* \langle A\Phi, A(\alpha\Psi + \beta\Phi)\rangle
\end{aligned}
$$

と計算される．さらに，

$$
|\langle A(\alpha\Psi + \beta\Phi), A\Psi\rangle| = |\langle \alpha\Psi + \beta\Phi, \Psi\rangle| = |\alpha|\, \|\Psi\|^2.
$$

同様に，

$$
|\langle A(\alpha\Psi + \beta\Phi), A\Phi\rangle| = |\langle \alpha\Psi + \beta\Phi, \Phi\rangle| = |\beta|\, \|\Phi\|^2.
$$

これらの関係式から，

$$
\langle A(\alpha\Psi + \beta\Phi), A\Psi\rangle = |\alpha|\, \|\Psi\|^2 e^{i\theta_1},\ \langle A(\alpha\Psi + \beta\Phi), A\Phi\rangle = |\beta|\, \|\Phi\|^2 e^{i\theta_2},
$$

と表わされる．ただし，θ_1, θ_2 は $\alpha, \beta, \Psi, \Phi$ に依存する実定数である．そこで，$\alpha' = |\alpha| e^{-i\theta_1}, \beta' = |\beta| e^{-i\theta_2}$ と選べば，$\| A(\alpha\Psi + \beta\Phi) - (\alpha' A\Psi + \beta' A\Phi) \|^2 = 0$ となる．したがって，(3.102) が成立する．明らかに，$|\alpha'| = |\alpha|, |\beta'| = |\beta|$ である． □

複素数に関する次の事実は容易に証明される．

補題 3.36 複素数 z, w が $|z| = |w| = 1, |1+z| = |1+w|$ をみたすならば，$z = w$ または $z = w^*$ が成立する．

以上でウィグナーの定理の証明の準備ができた．

定理 3.31 の証明

T が線形演算子 T_L または反線形演算子 T_A にウィグナー同値であれば，T_L, T_A は明らかに等長である．したがって，特に，$\mathsf{R}(T_L) = \mathsf{H}$ ($\mathsf{R}(T_A) = \mathsf{H}$) ならば，

T_L (T_A) はユニタリ（反ユニタリ）である．ゆえに，$\dim \mathsf{H} \geq 2$（$\dim \mathsf{H} = 1$）の場合，T が線形演算子または（および）反線形演算子にウィグナー同値であることを示せば十分である．

まず，$\dim \mathsf{H} = 1$ の場合を考える．この場合，H の単位ベクトル Ψ をひとつ選べば，H の任意のベクトルは，Ψ のスカラー倍 $\alpha\Psi$ $(\alpha \in \mathbb{C})$ で表わされる．そこで，H 上の写像 T_L を

$$T_L(\alpha\Psi) = \alpha T(\Psi)$$

によって定義する．このとき，T_L が線形であることは容易に確かめられる．T は内積の絶対値を保存するので，$|\langle T\Psi, T(\alpha\Psi)\rangle| = |\alpha|$．したがって，$\alpha \neq 0$ とし，

$$C(\alpha) = \langle T\Psi, T(\alpha\Psi)\rangle^{-1}\alpha$$

とおけば，$|C(\alpha)| = 1$ であり，$\|\alpha T\Psi - C(\alpha)T(\alpha\Psi)\|^2 = 0$ が成り立つ．したがって，$\alpha T\Psi = C(\alpha)T(\alpha\Psi)$．ゆえに，$T_L(\alpha\Psi) = C(\alpha)T(\alpha\Psi)$．これは，$T_L$ と T がウィグナー同値であることを意味する．

同様にして，H 上の写像 T_A を

$$T_A(\alpha\Psi) = \alpha^* T(\Psi)$$

によって定義すれば，T_A は反線形であり，T とウィグナー同値であることがわかる．こうして，$\dim \mathsf{H} = 1$ の場合の主張が証明される．

次に $\dim \mathsf{H} \geq 2$ の場合を考察する．Ψ を H の任意の単位ベクトルとしよう．T は内積の絶対値を保存するから，任意の $\Phi \in \mathsf{H}_\Psi^\perp$ と複素数 α に対して，

$$|\langle T(\alpha\Psi), T(\alpha\Psi + \Phi)\rangle| = \|\alpha\Psi\|^2 = |\alpha|^2$$

が成り立つことに注意する．集合 $\{\Psi + \Phi | \Phi \in H_\Psi^\perp\} \cup \mathsf{H}_\Psi^\perp$ から H への写像 A を次のように定義する：

$$\begin{aligned} A\Psi &= T\Psi, \\ A(\Psi + \Phi) &= C_1(\Psi, \Phi)T(\Psi + \Phi), \\ A\Phi &= C_2(\Psi, \Phi)T\Phi,\ \Phi \in \mathsf{H}_\Psi^\perp. \end{aligned}$$

ただし，定数 $C_1(\Psi,\Phi), C_2(\Psi,\Phi)$ は次のように選ぶ：

$$C_1(\Psi,\Phi) = \frac{1}{\langle T\Psi, T(\Psi+\Phi)\rangle},$$
$$C_2(\Psi,\Phi) = \begin{cases} \dfrac{\|\Phi\|^2}{C_1(\Psi,\Phi)^*\langle T(\Psi+\Phi), T\Phi\rangle} & ;\Phi \neq 0 \text{ のとき} \\ 1 & ;\Phi = 0 \text{ のとき} \end{cases}.$$

このとき，$|C_1(\Psi,\Phi)| = |C_2(\Psi,\Phi)| = 1$．したがって，$A$ は内積の絶対値を保存する．補題 3.35 によって，

$$A(\Psi+\Phi) = \alpha A\Psi + \beta A\Phi$$

となる定数 α, β で $|\alpha| = 1, |\beta| = 1$ をみたすものがある．関係式

$$\langle A\Psi, A\Psi\rangle = \|\Psi\|^2 = 1, \quad |\langle A\Psi, A\Phi\rangle| = |\langle\Psi,\Phi\rangle| = 0$$

と $C_1(\Psi,\Phi)$ の定義を用いると，

$$\alpha = \langle A\Psi, A(\Psi+\Phi)\rangle = \langle T\Psi, C_1(\Psi,\Phi)T(\Psi+\Phi)\rangle = 1.$$

したがって，

$$A(\Psi+\Phi) = A\Psi + \beta A\Phi.$$

同様の考え方により，$C_2(\Psi,\Phi)$ の定義によって，

$$\beta = \frac{\langle C_2(\Psi,\Phi)T\Phi, C_1(\Psi,\Phi)T(\Psi+\Phi)\rangle}{\|\Phi\|^2} = 1.$$

ゆえに，

$$A(\Psi+\Phi) = A\Psi + A\Phi \tag{3.103}$$

が得られる（$\Phi = 0$ のときはこの式は自明）．

Φ を $\mathsf{H}_\Psi^\perp$ の任意の単位ベクトルとする．このとき，(3.103) と補題 3.35 によって，

$$A(\Psi+\alpha\Phi) = A\Psi + A(\alpha\Phi) = A\Psi + \alpha' A\Phi \tag{3.104}$$

をみたす $\alpha' \in \mathbb{C}$ が存在する（$|\alpha| = |\alpha'|$）．(3.103) と (3.104) の対応する辺の内積の絶対値をとると，

$$|1 + \alpha| = |1 + \alpha'|.$$

これと $|\alpha| = |\alpha'|$ および補題 3.36 によって，

$$\alpha' = \alpha \quad \text{または} \quad \alpha' = \alpha^* \tag{3.105}$$

が成立する．特に，α が実数ならば，$\alpha' = \alpha$.

α は実数でないとして，まず，(3.105) で $\alpha' = \alpha$ の場合を考えよう．したがって，

$$A(\Psi + \alpha\Phi) = A\Psi + \alpha A\Phi. \tag{3.106}$$

このとき，任意の実数でない $\beta \in \mathbb{C}$ に対して，

$$A(\Psi + \beta\Phi) = A\Psi + \beta A\Phi \tag{3.107}$$

を示したい．(3.104) と同様に，

$$A(\Psi + \beta\Phi) = A\Psi + \beta' A\Phi \tag{3.108}$$

と書ける（$|\beta'| = |\beta|$）．これと (3.106) の対応する辺との内積の絶対値をとると

$$|1 + \beta^*\alpha| = |1 + \beta'^*\alpha|.$$

これから，$\beta^*\alpha = \beta'^*\alpha$ または $\beta^*\alpha = \beta'\alpha^*$．一方，(3.105) と同様に，$\beta$ に関しては，$\beta = \beta'$ か $\beta^* = \beta'$ のどちらかである．もし，$\beta^* = \beta'$ とすれば，$\beta^*\alpha = \beta\alpha$ または $\alpha = \alpha^*$．いま，α は実数でないと仮定しているから，$\beta^*\alpha = \beta\alpha$．したがって，$\beta^* = \beta$ となるから，β は実数である．だが，これは矛盾である．ゆえに，$\beta' = \beta$ でなければならない．よって，(3.107) が成立する．

同様にして，$\alpha' = \alpha^*$ の場合は，(3.108) において，$\beta' = \beta^*$ になることが示される．

こうして，$\mathsf{H}_\Psi^\perp$ の任意の 1 次元部分空間に A を制限したものは，線形か反線形のどちらかであることがわかる．

次の段落の議論は，$\dim \mathsf{H} = 2$ の場合は必要でない．

Φ_1, Φ_2 を $\mathsf{H}_\Psi^\perp$ の互いに直交する単位ベクトルとする．複素数 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して，(3.103) と補題 3.35 によって，

$$A(\Psi + \alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2) = A\Psi + A(\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2) = A\Psi + \alpha'' A\Phi_1 + \beta'' A\Phi_2 \tag{3.109}$$

と書ける．ただし，$|\alpha''| = |\alpha|, |\beta''| = |\beta|$．(3.104) で $\Phi = \Phi_1$ とした式と (3.109) の対応する辺の内積の絶対値をとると

$$1 + |\alpha|^2 = |1 + \alpha''\alpha'^*|$$

これは，$\alpha' = \alpha''$ を意味する．同様に，$A(\Psi + \beta\Phi_2) = A\Psi + \beta' A\Phi_2$ とするとき，$\beta' = \beta''$ が成立する．したがって，(3.109) で $\Psi = 0$ として，$A0 = 0$ を用いると，

$$A(\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2) = \alpha' A\Phi_1 + \beta' A\Phi_2 = A(\alpha\Phi_1) + A(\beta\Phi_2)$$

以上から，A を $\mathsf{H}_\Psi^\perp$ に制限したものは，補題 3.32 の仮定をみたす．したがって，A は $\mathsf{H}_\Psi^\perp$ 上で加法的である．このとき，また，補題 3.34 の仮定もみたすことになるので，A は $\mathsf{H}_\Psi^\perp$ 全体で線形か反線形のどちらかである．こうして，T を $\mathsf{H}_\Psi^\perp$ に制限したものは，$\mathsf{H}_\Psi^\perp$ 上の線形または反線形な写像 $A \restriction \mathsf{H}_\Psi^\perp$ にウィグナー同値であることがわかる．そこで，次にそれぞれの場合について，別々に考察しよう．

まず，A が $\mathsf{H}_\Psi^\perp$ 全体で線形である場合を考える．このとき，線形性によって，A を H 全体に拡張できる．すなわち，H の任意のベクトルは $\alpha\Psi + \beta\Phi$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \Phi \in \mathsf{H}_\Psi^\perp)$ という形であるから，

$$T_L(\alpha\Psi + \beta\Phi) := \alpha A\Psi + \beta A\Phi,$$

によって，H 全体を定義域とする線形演算子 T_L を定義する．このとき，右辺が，$T(\alpha\Psi + \beta\Phi)$ に絶対値 1 の定数を乗じたものになっていることを示せばよ

い．$\alpha \neq 0$ のとき，

$$\begin{aligned} T_L(\alpha\Psi + \beta\Phi) &= \alpha(A\Psi + \alpha^{-1}\beta A\Phi) \\ &= \alpha[A\Psi + A(\alpha^{-1}\beta\Phi)] \\ &= \alpha A(\Psi + \alpha^{-1}\beta\Phi) \quad ((3.103)\text{ による}) \\ &= \alpha C_1(\Psi, \alpha^{-1}\beta\Phi)T(\Psi + \alpha^{-1}\beta\Phi). \end{aligned}$$

一方，補題 3.35 で $A = T$ の場合を考えると，任意の $\Xi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$T(\alpha\Xi) = f(\alpha, \Xi)T\Xi, \quad |\alpha| = |f(\alpha, \Xi)|,$$

みたす定数 $f(\alpha, \Xi)$ がある．したがって，

$$T_L(\alpha\Psi + \beta\Phi) = \alpha C_1(\Psi, \alpha^{-1}\beta\Xi)f(\alpha, \Psi + \alpha^{-1}\beta\Phi)^{-1}T(\alpha\Psi + \beta\Phi).$$

定数 $\alpha C_1(\Psi, \alpha^{-1}\beta\Phi)f(\alpha, \Psi + \alpha^{-1}\beta)^{-1}$ の絶対値は 1 である．$\alpha = 0$ のときは，$T_L(\beta\Phi) = A(\beta\Phi) = C_2(\Psi, \beta\Phi)T(\beta\Phi)$ である．ゆえに，T は T_L とウィグナー同値である．

次に A は $\mathsf{H}_\Psi^\perp$ 全体で反線形である場合を考える．この場合は，

$$T_A(\alpha\Psi + \beta\Phi) := \alpha^* A\Psi + \beta^* A\Phi, \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \Phi \in \mathsf{H}_\Psi^\perp,$$

によって，H 全体を定義域とする演算子 T_A を定義する．このとき，T_A は H 上の反線形な演算子である．前の場合と同様にして，T_A は A とウィグナー同値であることがわかる．□

(3.100) によって，ウィグナーの定理を写像 $T(t)$ に応用できる．したがって，$T(t)$ はある線形な等長写像 $T_L(t)$ または反線形な等長写像 $T_A(t)$ にウィグナー同値である．すなわち，$T(t)$ は，

$$T(t)\Psi = e^{i\theta_L(\Psi,t)}T_L(t)\Psi, \quad \Psi \in \mathsf{H}, \tag{3.110}$$

または

$$T(t)\Psi = e^{i\theta_A(\Psi,t)}T_A(t)\Psi, \quad \Psi \in \mathsf{H}, \tag{3.111}$$

という形に書ける．ただし，$\theta_L(\Psi,t),\theta_A(\Psi,t)$ は Ψ,t に依存する実数である．

すべての実数 θ と $\Psi\in\mathsf{H}$ に対して，$e^{i\theta}\Psi$ と Ψ は同一の射線に属する．$T_L(t)$（$T_A(t)$）が（反）線形であることに注意すれば，(3.110)（(3.111)）は，射線上では，写像 $T(t)$ は $T_L(t)$ または $T_A(t)$ と同一視できることになる．こうして，状態ベクトルの時間発展は線形または反線形な等長写像であるとみてよいことがわかる．そこで，これらのうちどちらが時間発展に対応するかを決定しなければならない．

結論から先に言えば，状態ベクトルの時間発展は反線形な等長写像にはなり得ない．これを示すために，まず $t=0$ の近傍を考える．$\mathsf{H}\neq\{0\}$ であるから，$\varepsilon_0:=|\langle\Psi,\Phi\rangle-\langle\Phi,\Psi\rangle|>0$ をみたすベクトル Ψ,Φ が H の中に存在する．$t=0$ での $T(t)$ の強連続性によって，任意の正数 $\varepsilon<\varepsilon_0$ に対して，ある正数 t_0 が存在して，$|t|\leq t_0$ ならば，$|\langle T(t)\Phi,T(t)\Psi\rangle-\langle\Phi,\Psi\rangle|<\varepsilon$．もし，$|t|\leq t_0$ をみたすどこかの時刻 t において，状態ベクトルの時間発展が反線形な等長写像であるとすれば，$\langle T(t)\Phi,T(t)\Psi\rangle=\langle\Psi,\Phi\rangle$ であるから，$|\langle\Psi,\Phi\rangle-\langle\Phi,\Psi\rangle|<\varepsilon$．だが，左辺は ε_0 であるから矛盾が生じる．したがって，$|t|\leq t_0$ においては状態ベクトルの時間発展は線形な等長写像であたえられることがわかる．同様にして，ある時刻 t で $T(t)$ が線形な等長写像ならば，t の適当な近傍でも $T(t)$ は線形な等長写像であることがわかる．これらのことから，結局，すべての t に対して $T(t)$ は線形な等長写像でなければならないことが結論される．

こうして，いくつかの基本的仮定から，状態ベクトルの時間発展を司る写像 $T(t)$ は線形な等長写像であること，すなわち，線形演算子であることが導かれる．この演算子 $T(t)$ を**状態の時間発展の演算子**とよぶ．

物理的に見た場合，時刻 $t+s$ の状態は，時刻 s の状態の t 秒後の状態または時刻 t の状態の s 秒後の状態であるとみなせるから時間発展の演算子 $T(t)$ に対して，条件

$$T(t)T(s)\Psi=T(s)T(t)\Psi=T(t+s)\Psi,\quad \Psi\in\mathsf{H},\ t,s\in\mathbb{R},$$

を課すのは自然であろう．これを演算子の形で書けば

$$T(0)=I,\quad T(t)T(s)=T(s)T(t)=T(t+s),\quad t,s\in\mathbb{R}\quad(3.112)$$

となる．この式で，$s=-t$ とすれば，すべての $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して

$$T(t)T(-t)\Psi = \Psi. \tag{3.113}$$

これは，$T(t)$ が全射であることを示している．このことと $T(t)$ の等長性をあわせれば，$T(t)$ はユニタリになることがわかる．また，$T(t)$ は，はじめの要請により，強連続である．

一般に，ヒルベルト空間 H 上の有界演算子の族 $\{U(t) | t \in \mathbb{R}\}$ が次の (a)–(c) を満たすとき，これを**強連続1パラメーターユニタリ群** (strongly continuous one-parameter unitary group) とよぶ．

(a)　（強連続性） $U(t)$ は t について強連続である．

(b)　（ユニタリ性） 各 $t \in \mathbb{R}$ に対して，$U(t)$ はユニタリである．

(c)　（群特性） すべての $s, t \in \mathbb{R}$ に対して

$$U(t)U(s) = U(t+s).$$

この用語を用いると，時間発展の演算子の族 $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ は状態のヒルベルト空間上の強連続1パラメーターユニタリ群によって表わされるということである．

ここでひとまず物理的考察を離れて，強連続1パラメーターユニタリ群について，数学的な考察をしよう．

3.5.4　ストーンの定理

任意の自己共役演算子 A に対して，強連続1パラメーターユニタリ群を対応させることができる．実際，A のスペクトル測度を E_A とすれば，演算子解析によって定義される演算子

$$U(t) := e^{itA} := \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} dE_A(\lambda) \tag{3.114}$$

はユニタリ演算子であり，これに対し次の定理が成り立つ．

定理 3.37　(3.114) によってあたえられる演算子の族 $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ は強連続1パラメーターユニタリ群である．さらに，次のことが成り立つ:

(i) $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ ならば

$$\text{s-}\lim_{t\to 0}\frac{U(t)\Psi-\Psi}{t}=iA\Psi.$$

(ii) ベクトル $\Psi \in \mathsf{H}$ について,

$$\text{s-}\lim_{t\to 0}\frac{U(t)\Psi-\Psi}{t}$$

が存在するならば（つまり, $U(t)\Psi$ が $t=0$ で強微分可能ならば）, $\Psi \in \mathsf{D}(A)$.

(iii) 任意の $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して, $U(t)\Psi \in \mathsf{D}(A)$ であり,

$$\frac{dU(t)\Psi}{dt}=iAU(t)\Psi=iU(t)A\Psi. \tag{3.115}$$

証明 すでに述べたように, $U(t)$ はユニタリ演算子である. まず, $U(t)$ の強連続性を示そう. 任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して

$$\begin{aligned}\|U(t+\varepsilon)\Psi-U(t)\Psi\|^2 &= \int_{\mathbb{R}}|e^{i(t+\varepsilon)\lambda}-e^{it\lambda}|^2 d\|E_A(\lambda)\Psi\|^2\\ &= \int_{\mathbb{R}}F_\varepsilon(\lambda)d\|E_A(\lambda)\Psi\|^2.\end{aligned}$$

ただし, $F_\varepsilon(\lambda)=|e^{i\varepsilon\lambda}-1|^2$. 明らかに,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}F_\varepsilon(\lambda)=0,\quad F_\varepsilon(\lambda)\le 4,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

であるから, ルベーグの優収束定理によって,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|U(t+\varepsilon)\Psi-U(t)\Psi\|^2=0.$$

したがって, $U(t)$ は t について強連続である.

定理 2.71(vii) より,

$$U(t)U(s)=\int_{\mathbb{R}}e^{it\lambda}e^{is\lambda}dE_A(\lambda)=\int_{\mathbb{R}}e^{i(t+s)\lambda}dE_A(\lambda)=U(t+s).$$

以上から, $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ は強連続 1 パラメーターユニタリ群である.

(i) $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ とする．演算子解析により，

$$\left\|\frac{U(t)-I}{t}\Psi - iA\Psi\right\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{e^{it\lambda}-1}{t} - i\lambda\right|^2 d\|E_A(\lambda)\Psi\|^2.$$

初等的な不等式

$$|e^{ix}-1| \le |x|, \quad x \in \mathbb{R}$$

によって，

$$\left|\frac{e^{it\lambda}-1}{t} - i\lambda\right|^2 \le 4|\lambda|^2.$$

さらに，

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{it\lambda}-1}{t} - i\lambda = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

いま，$\Psi \in \mathsf{D}(A)$ を仮定しているから，$\int |\lambda|^2 d\|E_A(\lambda)\Psi\|^2 < \infty$．よって，ルベーグの優収束定理によって

$$\lim_{t\to 0} \left\|\frac{U(t)-I}{t}\Psi - iA\Psi\right\|^2 = 0.$$

(ii) 演算子解析により，

$$\left\|\frac{U(t)-I}{t}\Psi\right\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{e^{it\lambda}-1}{t}\right|^2 d\|E_A(\lambda)\Psi\|^2.$$

仮定のもとでは，両辺の $t \to 0$ の極限は存在する．ファトゥーの補題（付録 A，定理 A.7）を使えば

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\lambda|^2 d\|E_A(\lambda)\Psi\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{t\to 0} \left|\frac{e^{it\lambda}-1}{t}\right|^2 d\|E_A(\lambda)\Psi\|^2 \\ &\le \lim_{t\to 0} \int \left|\frac{e^{it\lambda}-1}{t}\right|^2 d\|E_A(\lambda)\Psi\|^2 \\ &= \lim_{t\to 0} \left\|\frac{U(t)-I}{t}\Psi\right\|^2 < \infty.\end{aligned}$$

したがって，$\Psi \in \mathsf{D}(A)$.

(iii) $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ ならば，$U(t)\Psi \in \mathsf{D}(A)$ であることは，演算子解析により，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\|E_A(\lambda)U(t)\Psi\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 |e^{it\lambda}|^2 d\|E_A(\lambda)\Psi\|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\|E_A(\lambda)\Psi\|^2 < \infty\end{aligned}$$

となることによる．任意の実数 ε, t に対して，

$$\frac{U(t+\varepsilon)-U(t)}{\varepsilon} = \frac{U(\varepsilon)-I}{\varepsilon}U(t) = U(t)\frac{U(\varepsilon)-I}{\varepsilon}$$

に注意し，(i) の結果を応用すれば，(3.115) が得られる． □

(3.114) によってあたえられる演算子の族 $\{U(t)|t \in \mathbb{R}\}$ を自己共役演算子 A によって生成される**強連続 1 パラメーターユニタリ群**，A をその**生成子** (generator) とよぶ．

定理 3.37 の逆も成り立つ：

定理 3.38 ストーンの定理． $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ を H 上の強連続 1 パラメーターユニタリ群としよう．このとき，

$$U(t) = e^{itA}, \quad t \in \mathbb{R},$$

となる自己共役演算子 A がただひとつ存在する．

証明 証明の方法は，A を具体的に $U(t)$ から定義し，それが望まれる特性をもつことを示すことである．定理 3.37(ii) より，A は $U(t)$ の $t=0$ での強微分の $-i$ 倍として定義すればよいと予想される．そこで，まず，$U(t)$ が $t=0$ で微分可能であることを示さなければならないが，その場合，どの部分空間上でそうなるかが問題である．そのための適切な部分空間をさがさなければならない．

$f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ とし，各 $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して

$$\Psi_f = \int_{\mathbb{R}} f(t)U(t)\Psi dt$$

を定義する．$f(t)U(t)\Psi$ も強連続であり，その台は有界なので，右辺はリーマン積分として存在する．D をそのようなベクトルの生成する部分空間とする:

$$\mathsf{D} = \mathcal{L}\{\Psi_f | f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}), \Psi \in \mathsf{H}\}.$$

まず，D が H で稠密であることを示そう．$\operatorname{supp} g \subset [-1, 1]$，$\int_{\mathbb{R}} g(t)dt = 1$ をみたす $g \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ をとり，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$g_\varepsilon(t) = g(t/\varepsilon)/\varepsilon$ とおく．このとき，$\int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(t)dt = 1$，$\operatorname{supp} g_\varepsilon \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$ であるから，

$$\begin{aligned}
\|\Psi_{g_\varepsilon} - \Psi\| &= \left\| \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t)(U(t)\Psi - \Psi)dt \right\| \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(t)dt \right) \sup_{|t|\leq\varepsilon} \|U(t)\Psi - \Psi\| \\
&= \sup_{|t|\leq\varepsilon} \|U(t)\Psi - \Psi\|.
\end{aligned}$$

H-値関数：$t \to U(t)\Psi$ は $t = 0$ で強連続であるから，t の近傍で一様連続である．したがって，$\sup_{|t|\leq\varepsilon} \|U(t)\Psi - \Psi\| \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$．ゆえに，$\Psi_{g_\varepsilon} \to \Psi$ $(\varepsilon \to 0)$．したがって，D は稠密である．

$\Psi_f \in \mathsf{D}$ としよう．$U(s)$ は有界演算子であるから

$$U(s)\Psi_f = \int_{\mathbb{R}} f(t)U(s)U(t)\Psi dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)U(s+t)\Psi dt$$

が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned}
\left(\frac{U(s) - I}{s} \right) \Psi_f &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\frac{U(s+t) - U(t)}{s} \right) \Psi dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{f(t-s) - f(t)}{s} \right) U(t)\Psi dt
\end{aligned}$$

$[f(t-s) - f(t)]/s$ は $s \to 0$ のとき，$-f'(t)$ に収束し，$|f(t-s) - f(t)| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |f'(t)|\,|s|$ であるので，

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0} \left(\frac{U(s) - I}{s} \right) \Psi_f &= -\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)U(t)\Psi dt \\
&= \Psi_{-f'} \qquad (3.116)
\end{aligned}$$

を得る．そこで，D を定義域とする演算子 A_0 を次のように定義する．$\Psi_f \in \mathsf{D}$ に対しては，

$$A_0\Psi_f = -i\Psi_{-f'}$$

とし，D の 一般のベクトルに対しては線形性によって拡張する．この場合，A_0 がきちんと定義されている (well-defined) ことを確かめなければならないが，そのためには，$\Psi \in \mathsf{D}$ が

$$\Psi = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \Psi_{f_n}^{(n)} = \sum_{m=1}^{M} \beta_m \Phi_{g_m}^{(m)}$$

と 2 通りに表わされたとき ($\Psi^{(n)}, \Phi^{(m)} \in \mathsf{H}, f_n, g_m \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}), \alpha_n, \beta_m \in \mathbb{C}$),

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \Psi_{-f_n'}^{(n)} = \sum_{m=1}^{M} \beta_m \Psi_{-g_m'}^{(m)}$$

を示せばよい（このとき，$A_0\Psi$ は Ψ の表わし方によらず定まるので確かにきちんと定義されている）．しかし，これは，関係式 (3.116) を使えば容易である．明らかに $U(t): \mathsf{D} \to \mathsf{D}$，$A_0 : \mathsf{D} \to \mathsf{D}$ であり，

$$U(t)A_0\Psi_f = A_0U(t)\Psi_f, \quad \Psi_f \in \mathsf{D},$$

が成り立つ．さらに，任意の $\Psi_f, \Phi_g \in \mathsf{D}$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle A_0\Psi_f, \Phi_g\rangle &= \lim_{s\to 0} \left\langle \left(\frac{U(s)-I}{is}\right)\Psi_f, \Phi_g \right\rangle \\
&= \lim_{s\to 0} \left\langle \Psi_f, \left(\frac{I-U(-s)}{is}\right)\Phi_g \right\rangle \\
&= \langle \Psi_f, -i\Phi_{-g'}\rangle \\
&= \langle \Psi_f, A_0\Phi_g\rangle.
\end{aligned}$$

したがって，A_0 は対称である．

次に A_0 は本質的に自己共役であることを示す．そのためには $\ker(A_0^* \pm i) = \{0\}$ を証明すればよい（定理 2.44）．$\eta \in \mathsf{D}(A_0^*)$ が $A_0^*\eta = i\eta$ をみたすとしよ

う．このとき，任意の $\Psi \in \mathsf{D}(A_0) = \mathsf{D}$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle U(t)\Psi, \eta\rangle &= \langle iA_0U(t)\Psi, \eta\rangle \\ &= -i\langle U(t)\Psi, A_0^*\eta\rangle = -i\langle U(t)\Psi, i\eta\rangle \\ &= \langle U(t)\Psi, \eta\rangle.\end{aligned}$$

これは，複素数値関数 $u(t) := \langle U(t)\Psi, \eta\rangle$ が常微分方程式 $u'(t) = u(t)$ をみたすことを示している．したがって，$u(t) = u(0)e^t$．ところが，$\|U(t)\| = 1$ であるから，$|u(t)| \le \|\Psi\|\,\|\eta\|$, すなわち，$u$ は有界である．したがって，$u(0) = 0$ でなければならない．ゆえに，$\langle\Psi, \eta\rangle = 0$．$\mathsf{D}$ は稠密であったから，$\eta = 0$．よって，$\ker(A_0^* - i) = \{0\}$．同様にして，$\ker(A_0^* + i) = \{0\}$ が示される．

いま，証明したことによって，A_0 の閉包を A とすれば，A は自己共役である．そこで，$V(t) = e^{itA}$ とおけば，定理 3.37 によって，これは，強連続 1 パラメーターユニタリ群である．$U(t) = V(t)$ を示そう．$\Psi \in \mathsf{D}$ とすれば，これは $\mathsf{D}(A)$ の元でもあるから，定理 3.37(iii) を応用することにより，$V(t)\Psi \in \mathsf{D}(A)$ かつ

$$\frac{dV(t)\Psi}{dt} = iAV(t)\Psi.$$

すでに見たように，$U(t)\Psi \in \mathsf{D} \subset \mathsf{D}(A)$ であるから，ベクトル $\Psi(t) \equiv U(t)\Psi - V(t)\Psi$ は $\mathsf{D}(A)$ に属する．さらに，このベクトルは強微分可能であって，

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi(t)}{dt} &= iA_0U(t)\Psi - iAV(t)\Psi \\ &= iA\Psi(t).\end{aligned}$$

したがって，$\|\Psi(t)\|^2$ は微分可能であり，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\Psi(t)\|^2 &= \left\langle \frac{d\Psi(t)}{dt}, \Psi(t)\right\rangle + \left\langle \Psi(t), \frac{d\Psi(t)}{dt}\right\rangle \\ &= -i\langle A\Psi(t), \Psi(t)\rangle + i\langle\Psi(t), A\Psi(t)\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

ゆえに，$\|\Psi(t)\| = \|\Psi(0)\| = 0$. これは，すべての $t \in \mathbb{R}$, $\Psi \in \mathsf{D}$ に対して，$U(t)\Psi = V(t)\Psi$ を意味する．D は稠密であったから $U(t) = V(t)$ となる． □

3.5.5　抽象シュレーディンガー方程式

状態の時間発展の演算子 $T(t)$ に，ストーンの定理を応用すれば，$T(t)$ はある自己共役演算子 $\widetilde{H}$ を用いて

$$T(t) = e^{i\widetilde{H}t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

と表現されることがわかる．つまり，系の時間発展にはひとつの自己共役演算子 $\widetilde{H}$ が対応することがわかった．これが物理的に何を表わすかを見るために，古典力学系との対応を考慮する．

ハミルトン形式で記述される，自由度 d の古典力学系を考え，その正準座標を $q = (q_1, \cdots, q_d), p = (p_1, \cdots, p_d)$，ハミルトニアンを $H_{\mathrm{cl}}(q,p)$ とする．時刻 t における系の状態 $(q(t), p(t))$ は**ハミルトンの正準方程式**

$$\frac{dq_j(t)}{dt} = \partial_{p_j} H(q(t), p(t)), \ \frac{dp_j(t)}{dt} = -\partial_{q_j} H(q(t), p(t)), \quad j = 1, \cdots, d,$$

によって，適当な初期条件のもとで，一意的に決定される．つまり，この古典力学系の状態の時間発展はハミルトニアン $H_{\mathrm{cl}}(q,p)$ から原理的に決まることになる．

いま述べた，古典力学系の時間発展の在り方と対応させる意味で，量子系においても，系の状態の時間発展がハミルトニアンから一義的に決まると考えてみよう．そうすると，上記の自己共役演算子 $\widetilde{H}$ はハミルトニアンのスカラー倍とみなすのが自然である．すなわち，考察下の量子系のハミルトニアンを H とすれば，実定数 a があって，$a\widetilde{H} = H$ が成り立つ．したがって，$T(t) = e^{itH/a}$.

この演算子はエネルギー固有値 E の固有状態に作用して角振動数[*30] $\omega = |E/a|$ の振動をおこすが，これはプランク，アインシュタインの $E = h\nu$ に由来するド・ブロイ波の角振動数 $|E/\hbar|$ にくらべるべきものであって，$|a| = 1$ が知れる．実際には $a' = -1$ をとるが，この選択に特別の理由があるわけではない．こうして，量子系の時間発展の演算子 $T(t)$ の形が

$$T(t) = e^{-itH/\hbar} \tag{3.117}$$

---

*30 振動数 $\nu = 1/$(振動周期) の 2π 倍：$\omega = 2\pi\nu$. 念のためにいえば，$\hbar$ はプランク定数 h の $1/(2\pi)$ 倍である $\hbar = h/(2\pi)$.

という形に定まる．以上は発見法的な議論であった．そこで，量子系の状態の時間発展に関して次の公理を設ける：

公理 QM5 量子系の状態の時間発展は系のハミルトニアン H から定まる強連続 1 パラメーターユニタリ群 $\{e^{-iHt/\hbar}\}_{t\in\mathbb{R}}$ で記述される．すなわち，系が時刻 t_0 で状態 Ψ にあるとき，系に対する観測をしない限り，時刻 t での状態は，$e^{-i(t-t_0)H/\hbar}\Psi$ によってあたえられる．

この公理によれば，系が観測による擾乱をこうむらない限り，任意の時刻の状態はその前の状態から一意的に定まるという意味で，系の状態の時間発展は因果的である．

公理 QM5 に述べられているような形で，量子系の時間発展を状態のそれとしてとらえる見方を**シュレーディンガー描像** (Schrödinger picture) という．だが，この描像とは異なる仕方で量子系の時間発展を記述することも可能であり，そのひとつを 3.7 節で述べる．

公理 QM5 によって，$t=0$ で状態 $\Psi \in \mathsf{D}(H)$ にあった系は時刻 t ではベクトル

$$\Psi(t) := T(t)\Psi = e^{-itH/\hbar}\Psi \tag{3.118}$$

によって記述される状態に移行する．定理 3.37(iii) によって，$\Psi(t)$ は t について強微分可能であり，

$$i\hbar\frac{d}{dt}\Psi(t) = H\Psi(t) \tag{3.119}$$

が成り立つ．これは，状態の時間発展に対する微分方程式とみることができる．

一般に，H をヒルベルト空間，A を H 上の演算子とするとき，微分方程式

$$i\hbar\frac{d\Psi(t)}{dt} = A\Psi(t) \tag{3.120}$$

を A から定まる**抽象シュレーディンガー方程式**あるいは単に**シュレーディンガー方程式**という．ここで，微分は強微分の意味であり，(3.120) は $\Psi(t) \in \mathsf{D}(A)$, $t \in \mathbb{R}$, という条件も含んでいるとする．

(3.119) によって，ハミルトニアンが自己共役演算子 H で記述される量子系の状態の時間発展は H から定まるシュレーディンガー方程式にしたがうことがわかったわけである．

逆に，系のハミルトニアン H があたえられたとき，シュレーディンガー方程式 (3.119) の解は (3.118) であたえられるであろうか．この疑問に答えるのが次の定理である．

定理 3.39　H をヒルベルト空間，A を H 上の自己共役演算子，$\Psi \in \mathsf{D}(A)$ とする．このとき，シュレーディンガー方程式 (3.120) の解 $\Psi(t) \in \mathsf{D}(A)$ で $\Psi(0) = \Psi$ をみたすものはただひとつ存在し，それは $\Psi(t) = e^{-itA/\hbar}\Psi$ によってあたえられる．

証明　定理 3.37(iii) によって，$\Psi(t) = e^{-itA/\hbar}\Psi$ は (3.120) のひとつの解である．解の一意性を証明しよう．(3.120) の解が二つあったとして，　それらを $\Psi_1(t), \Psi_2(t)$ としよう．ただし，初期条件は同じとする：$\Psi_1(0) = \Psi_2(0) = \Psi$. $\Phi(t) = \Psi_1(t) - \Psi_2(t)$ とすれば，$\Phi(0) = 0$ かつ $i\hbar d\Phi(t)/dt = A\Phi(t) \cdots (*)$ が成り立つ．このとき，$\|\Phi(t)\|^2$ は微分可能であり，

$$\frac{d}{dt}\|\Phi(t)\|^2 = \left\langle \frac{d\Phi(t)}{dt}, \Phi(t) \right\rangle + \left\langle \Phi(t), \frac{d\Phi(t)}{dt} \right\rangle.$$

そこで，$\Phi(t)$ のみたす微分方程式 $(*)$ と A のエルミート性を用いると，右辺は 0 になることがわかる．したがって，$\|\Phi(t)\|$ は t によらない定数である．特に $\|\Phi(t)\| = \|\Phi(0)\| = 0$. ゆえに $\Psi_1(t) = \Psi_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, を得る．　□

注意　上の証明からわかるように，(3.120) の解の一意性に関しては，A はエルミート演算子であるというだけで十分である．

定理 3.39 は次のことを意味する：量子力学の具体的なモデルにおいて，そのハミルトニアン H の自己共役性が証明されれば，状態の時間発展を決めるシュレーディンガー方程式は一意的に解ける．系の時間発展の性質を詳しく調べることは，スペクトル定理（演算子解析）を経由して定義されている演算子 $e^{-itH/\hbar}$ をより具体的に解析する問題と同等になる．次の節で，自由粒子の量子系の状態の時間発展について，それがどのようなものであるかを例証する．

ハミルトニアン H から定まるシュレーディンガー方程式 (3.119) を変数分離法で解くことを考えてみよう．すなわち，$u(t)$ を $\mathbb{R}$ 上の微分可能な関数とし，(3.119) の解 $\Psi(t)$ で $\Psi(0) = \Psi \in \mathsf{D}(H)$ $(\Psi \neq 0)$ をみたすものを $\Psi(t) = u(t)\Psi$ の形に仮定して，(3.119) を解くのである．この場合，(3.119) は，

$$i\hbar u'(t)\Psi = u(t)H\Psi$$

を導く．そこで，E を実数として，

$$H\Psi = E\Psi \tag{3.121}$$

を仮定すると，$i\hbar u'(t) = Eu(t)$．したがって，$u(0) = 1$ を考慮すれば，$u(t) = e^{-itE/\hbar}$．ゆえに，

$$\Psi(t) = e^{-itE/\hbar}\Psi. \tag{3.122}$$

方程式 (3.121) は H の固有ベクトル方程式にほかならない．量子力学の文脈では，方程式 (3.121) を**定常状態に対するシュレーディンガー方程式**，その解（すなわち，固有値 E に属する H の固有ベクトル）をエネルギー E の**定常状態** (stationary state) あるいは**固有状態** (eigenstate) という[*31]．

式 (3.122) の $\Psi(t)$ は定常状態 Ψ の時間発展を記述する．容易にわかるように，$E \neq 0$ の場合，それは，$2\pi\hbar/E$ を周期とする時間発展をする（すなわち，$\Psi(t + 2\pi\hbar/E) = \Psi(t), t \in \mathbb{R}$）．

3.5.6 最低エネルギーに対する変分原理

ハミルトニアンを表わす自己共役演算子 H は下に有界であるとしよう．この場合，H のスペクトル $\sigma(H)$ も下に有界であるから，

$$E_0(H) := \inf \sigma(H) \tag{3.123}$$

が定義される．$\sigma(H)$ は閉集合であるから，$E_0(H) \in \sigma(H)$ である．$E_0(H)$ を H の**最低エネルギー** (lowest energy) とよぶ．ただし，こうよんだからといって，$E_0(H)$ は H の固有値である必要はない．

[*31] 方程式 (3.121) は**時間に依存しないシュレーディンガー方程式**ともよばれる．これに対し，もともとのシュレーディンガー方程式 (3.119) を**時間に依存するシュレーディンガー方程式**という場合がある．

$E_0(H)$ が H の固有値であるとき，これに属する，H の固有ベクトルを H の**基底状態** (ground state) という．

基底状態というのは，多くの場合，量子系の状態の中でも顕著な性質をもつ独特の状態であることが知られる．この点については，後の章で可能な限り明らかにしてゆくつもりである．さしあたって，基底状態の性質を調べることは理論的に極めて重要であることを心に留めておいていただければ十分である．ここでは，基底状態に関わる基本的な事柄を証明しておく．

まず，ハミルトニアンの最低エネルギーについてであるが，これは，その値をたとえ正確に求めることができなくても，それがどのくらいの値になるかを見積もる（評価する）ことは物理的にも重要性をもつ．次の定理はこの目的のためにも有用である．

定理 3.40 H をヒルベルト空間，H を H 上の，下に有界な自己共役演算子とする．このとき，

$$E_0(H) = \inf_{\Psi \in \mathsf{D}(H), \|\Psi\|=1} \langle \Psi, H\Psi \rangle. \tag{3.124}$$

証明 (3.124) の右辺の量を γ とすれば，明らかに $H \geq \gamma$．したがって，定理 2.40(ii) によって，$\gamma \leq E_0(H)$．一方，$\sigma(H) = \mathrm{supp}\, E_H$ (E_H は H のスペクトル測度) であるから（2.9.5 項を参照），任意の $\Psi \in \mathsf{D}(H)$ に対して，

$$\begin{aligned}
\langle \Psi, H\Psi \rangle &= \int_{[E_0(H),\infty)} \lambda d\|E_H(\lambda)\Psi\|^2 \\
&\geq E_0(H) \int_{[E_0(H),\infty)} d\|E_H(\lambda)\Psi\|^2 \\
&= E_0(H)\|\Psi\|^2.
\end{aligned}$$

これは $E_0(H) \leq \gamma$ を意味する．したがって，$E_0(H) = \gamma$ が得られる． □

定理 3.40 の演算子 H に対して，

$$\mathsf{D}_1(H) := \{\Psi \in \mathsf{D}(H) | \, \|\Psi\| = 1\} \tag{3.125}$$

とすれば，$\mathsf{D}_1(H)$ から $\mathbb{R}$ への写像 $\mathcal{E}_H : \Psi \to \langle \Psi, H\Psi \rangle$，すなわち，

$$\mathcal{E}_H(\Psi) := \langle \Psi, H\Psi \rangle \tag{3.126}$$

は $\mathsf{D}_1(H)$ 上の（非線形）汎関数をあたえる．この汎関数を用いると，定理 3.40 は

$$E_0(H) = \inf_{\Psi \in \mathsf{D}_1(H)} \mathcal{E}_H(\Psi)$$

と書き換えられる．したがって，$\mathcal{E}_H(\Psi) \geq E_0(H)$, $\Psi \in \mathsf{D}_1(H)$ であり，

$$\mathcal{E}_H(\Psi_n) \downarrow E_0(H) \ (n \to \infty)$$

となる $\Psi_n \in \mathsf{D}_1(H)$ が存在する．そのような Ψ_n に対して，$\mathcal{E}_H(\Psi_n)$ は $E_0(H)$ に対する近似値をあたえる．

次の事実にも注目しよう：

命題 3.41　演算子 H は定理 3.40 と同じものとする．もし，$E_0(H) = \mathcal{E}_H(\Psi_0)$ となるベクトル $\Psi_0 \in \mathsf{D}_1(H)$ が存在するならば（すなわち，$E_0(H)$ が単に汎関数 $\mathcal{E}_H$ の下限ではなく，その最小値になっている場合），$E_0(H)$ は H の固有値であり，Ψ_0 はこれに属する，H の固有ベクトルである：

$$H\Psi_0 = E_0(H)\Psi_0.$$

証明　演算子 $H - E_0(H)$ は非負の自己共役演算子であるから，$\mathsf{D}(H) \times \mathsf{D}(H)$ から $\mathbb{C}$ への写像 $(\Psi, \Phi) \to \langle \Psi, [H - E_0(H)]\Phi \rangle, \Psi, \Phi \in \mathsf{D}(H)$, は $\mathsf{D}(H)$ の半正定値内積をあたえる．したがって，シュヴァルツの不等式が成り立つから，

$$|\langle \Psi, [H - E_0(H)]\Phi \rangle| \leq \sqrt{\langle \Psi, [H - E_0(H)]\Psi \rangle} \sqrt{\langle \Phi, [H - E_0(H)]\Phi \rangle}.$$

特に，$\Phi = \Psi_0$ とすれば，仮定によって，$\langle \Psi_0, [H - E_0(H)]\Psi_0 \rangle = \mathcal{E}_H(\Psi_0) - E_0(H) = 0$ であるから，$\langle \Psi, [H - E_0(H)]\Psi_0 \rangle = 0$. これがすべての $\Psi \in \mathsf{D}(H)$ に対して成り立ち，$\mathsf{D}(H)$ は稠密であるから，$[H - E_0(H)]\Psi_0 = 0$. ゆえに題意が成立する．　□

量子力学の文脈では，命題 3.41 は次のことを意味する：H がハミルトニアンを表わす演算子であるとき，H の最低エネルギーが，汎関数 $\mathcal{E}_H$ の最小値であたえられるならば，その最小値を実現するベクトルは H の基底状態である．これはちょうど解析力学において，作用汎関数の停留点を実現する関数が運動方程式の解をあたえる構造と類似している．この意味で，(3.124) を**最低エネルギーに対する変分原理** (variational principle) という．

例 3.8　(3.56) によって定義される，自由粒子系のハミルトニアン $H_0^{(N)}$ の最低エネルギーを $E_0(H_0^{(N)})$ とすれば，定理 3.28 によって，

$$E_0(H_0^{(N)}) = 0 \tag{3.127}$$

である．ここでは，$H_0^{(N)}$ の自己共役性はわかっているものとして，定理 3.40 を応用することにより，(3.127) を証明してみよう．$H_0^{(N)} \geq 0$ は，$-\Delta_{x_j} = -D_{x_j}D_{x_j}$ と $D_{x_j}^* = -D_{x_j}$ より，容易にわかる．$f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{dN})$ で

$$\int_{\mathbb{R}^{dN}} |f(x_1, \cdots, x_N)|^2 dx_1 \cdots dx_N = 1$$

をみたすものをひとつ固定し，

$$\psi_n(x_1, \cdots, x_N) := \frac{1}{n^{dN/2}} f\left(\frac{x_1}{n}, \cdots, \frac{x_N}{n}\right), \quad n = 1, 2, \cdots,$$

とおく．このとき，$\psi_n \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{dN})$ であり，$\|\psi_n\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})} = 1$．さらに，

$$(\Delta_{x_j}\psi_n)(x_1, \cdots, x_N) = n^{-2}n^{-dN/2}(\Delta_{x_j}f)(x_1/n, \cdots, x_N/n).$$

したがって，

$$\langle \psi_n, H_0^{(N)}\psi_n \rangle_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})} = n^{-2}\langle f, H_0^{(N)} f \rangle_{\mathsf{L}^2(\ R^{dN})} \to 0 \ (n \to \infty).$$

ゆえに，定理 3.40 によって，(3.127) が結論される．　□

3.6　例：自由粒子の運動

d 次元空間 $\mathbb{R}^d$ を運動する，1 個の自由粒子を考えよう．粒子の質量を $m > 0$ とする．3.4 節で見たように，CCR のシュレーディンガー表現を用いた正準量子化によれば，この系のハミルトニアンは，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上の演算子

$$H_0 := -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta \tag{3.128}$$

であたえられる．ただし，Δ は d 次元の一般化されたラプラシアンである（式 (3.56) の記号を使えば，H_0 は $N = 1, m_1 = m$ の場合の $H_0^{(1)}$ である）．H_0 が

自己共役であることとそのスペクトル特性はすでにわかっている（定理 3.28）. 公理 QM5 によって，時刻 0 の状態を ψ とすれば，時刻 t の状態 $\psi(t)$ は

$$\psi(t) = e^{-itH_0/\hbar}\psi \tag{3.129}$$

によってあたえられる．$\mathbb{R}$ 上の $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$-値関数 $\psi(t)$ の x における値を $\psi(t)(x) = \psi(t,x)$ と書くことにすると，この系のシュレーディンガー方程式は，変数 x も含んだ形で書けば，

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(t,x) \tag{3.130}$$

である[*32]. 定理 3.39 により，この方程式の解 $\psi(t,\cdot) \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ で，$\psi(0,\cdot) = \psi \in \mathsf{D}(H_0)$ となるものは (3.129) によってあたえられる．ここでの問題は (3.129) の右辺をより具体的に表示することである．結果から述べれば，次の定理が成り立つ．

定理 3.42 (i) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，$e^{-itH_0/\hbar}$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ からそれ自身への全単射である．

(ii) すべての $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ と $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ に対して

$$(e^{-itH_0/\hbar}\psi)(x) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar|t|}\right)^{d/2} e^{-d\pi i\varepsilon(t)/4}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\frac{m}{2t\hbar}|x-y|^2}\psi(y)dy. \tag{3.131}$$

ただし，$\varepsilon(t)$ は**符号関数**である：$\varepsilon(t)=1$ ($t>0$ のとき), $\varepsilon=-1$ ($t<0$ のとき).

(iii) 任意の $\psi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ と $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ に対して，

$$\begin{aligned}&(e^{-itH_0/\hbar}\psi)(x)\\ &= \mathrm{l.i.m.}_{R\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi\hbar|t|}\right)^{d/2} e^{-d\pi i\varepsilon(t)/4}\int_{|y|\le R} e^{i\frac{m}{2t\hbar}|x-y|^2}\psi(y)dy.\end{aligned} \tag{3.132}$$

ここで，l.i.m. は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ のノルムでの収束（平均 2 乗収束）の意味で極限をと

[*32] これがいわゆる（自由粒子に対する）シュレーディンガー方程式である．

ることを表わす．すなわち，(3.132) は

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}dx\left|(e^{-itH_0/\hbar}\psi)(x)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{m}{2\pi\hbar|t|}\right)^{d/2}e^{-d\pi i\varepsilon(t)/4}\int_{|y|\le R}e^{i\frac{m}{2t\hbar}|x-y|^2}\psi(y)dy\right|^2=0 \tag{3.133}$$

という意味である．

証明　(i) $\mathcal{F}$ を d 次元のフーリエ変換とする．(3.60) と補題 3.27(ii) によって

$$\mathcal{F}e^{-itH_0/\hbar}\mathcal{F}^{-1}=e^{-it\hbar k^2/2m}. \tag{3.134}$$

が成り立つ．かけ算作用素 $e^{-it\hbar k^2/2m}$ が $\mathcal{S}(\mathbb{R}_k^d)$ を 1 対 1 にそれ自身の上へうつすことは容易にわかる．$\mathcal{F}$ は，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ から $\mathcal{S}(\mathbb{R}_k^d)$ への全単射であるから，題意が成立する．

(ii) $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ とする．(i) の結果とルベーグの優収束定理により，

$$\begin{aligned}(e^{-itH_0/\hbar}\psi)(x) &= \lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\varepsilon k^2}e^{ikx}e^{-it\hbar k^2/2m}\hat{\psi}(k)dk\\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\mathbb{R}^d}I_\varepsilon(x,y;t)\psi(y)dy.\end{aligned} \tag{3.135}$$

と書ける．ただし，$\varepsilon>0$,

$$I_\varepsilon(x,y;t)=\int_{\mathbb{R}^d}e^{ik(x-y)-\left(\varepsilon+i\frac{t\hbar}{2m}\right)k^2}dk$$

であり，最後の等号を得るために，フビニの定理を応用して dk と dy についての積分順序を交換した．$A_\varepsilon=\varepsilon+i\frac{t\hbar}{2m}$ とおくと，

$$I_\varepsilon(x,y;t)=e^{-\frac{|x-y|^2}{4A_\varepsilon}}\prod_{j=1}^{d}J_\varepsilon(x_j-y_j)$$

と書き直せる．ただし，

$$J_\varepsilon(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-A_\varepsilon(\lambda-\frac{is}{2A_\varepsilon})^2}d\lambda,\ s\in\mathbb{R}.$$

この積分は，コーシーの積分定理を応用することにより，

$$J_\varepsilon(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{A_\varepsilon}}$$

と計算される．ただし，$\sqrt{A_\varepsilon}$ は $\mathrm{Re}\sqrt{A_\varepsilon} > 0$ となる枝をとる．したがって，

$$I_\varepsilon(x, y; t) = \pi^{d/2}(\sqrt{A_\varepsilon})^{-d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4A_\varepsilon}}.$$

これは，

$$|I_\varepsilon(x, y; t)| \le \pi^{d/2}\left(\frac{2m}{|t|\hbar}\right)^{d/2},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(x, y; t) = \pi^{d/2}\left(\frac{2m}{|t|\hbar}\right)^{d/2} e^{-id\pi\varepsilon(t)/4} e^{i\frac{m}{2t\hbar}|x-y|^2},$$

を意味する．したがって，ルベーグの優収束定理によって，(3.135) の右辺において，$\lim_{\varepsilon\to 0}$ を積分の中にいれることができ，(3.131) が得られる．

(iii)

$$c_t = m^{d/2}(\hbar|t|)^{-d/2} e^{-d\pi i\varepsilon(t)/4}, \quad h_t(x) = \exp\left(\frac{im}{2t\hbar}x^2\right), \tag{3.136}$$

とすれば，(ii) の結果，すべての $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$(e^{-itH_0/\hbar}\psi)(x) = c_t h_t(x)(\mathcal{F}h_t\psi)\left(\frac{mx}{t\hbar}\right) \tag{3.137}$$

と書ける．任意の $\psi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\|\psi_n - \psi\| \to 0$ $(n \to \infty)$ となる $\psi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ が存在する．このとき，$e^{-itH_0/\hbar}\psi_n \to e^{-itH_0/\hbar}\psi, \mathcal{F}h_t\psi_n \to \mathcal{F}h_t\psi$ $(n \to \infty)$．したがって，(3.137) はすべての $\psi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ における等式として成り立つ．任意の $\phi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$(\mathcal{F}\phi)(k) = \mathrm{l.i.m.}_{R\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{|x|\le R} e^{-ikx}\phi(x)dx \tag{3.138}$$

であるから（付録 B，定理 B.9 を参照），これを (3.137) の右辺に適用すれば，(3.132) を得る．　□

公式 (3.132) の応用として，$\exp(-itH_0/\hbar)\psi$ ($\psi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$) の $t \to \pm\infty$ での挙動を明らかにすることができる．まず，補題をひとつ用意しよう．

補題 3.43　各 $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して，写像 $V_t : \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d) \to \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ を

$$V_t\psi(x) = \left(\frac{m}{|t|\hbar}\right)^{d/2} e^{-id\pi i\varepsilon(t)/4} e^{\frac{imx^2}{2t\hbar}} \hat{\psi}\left(\frac{mx}{t\hbar}\right) \tag{3.139}$$

によって定義する．このとき，V_t はユニタリである．

証明　V_t が $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ のノルムを保存すること，したがって，内積を保存することは，直接に計算を行ない，パーセヴァルの等式を応用することによりただちにわかる．V_t が全射であることはフーリエ変換の全射性に帰着される．　□

定理 3.44　V_t は (3.139) によってあたえられるものとする．このとき，すべての $\psi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|e^{-itH_0/\hbar}\psi - V_t\psi\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)} = 0. \tag{3.140}$$

証明　補題 3.43 によって V_t はユニタリであるから，(3.140) はすべての $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して証明されれば十分である（このとき，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ が $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ で稠密であることを用いて，(3.140) をすべての $\psi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ へと拡張できる）．(3.137) とパーセヴァルの等式を用いると

$$\|e^{-itH_0/\hbar}\psi - V_t\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |h_t(x) - 1|^2 |\psi(x)|^2 dx.$$

(3.136) と初等的な不等式 $|e^{it} - 1| \leq |t|$, $t \in \mathbb{R}$ によって，

$$|h_t(x) - 1| \leq \frac{mx^2}{2|t|\hbar}.$$

したがって，

$$\|e^{-itH_0/\hbar}\psi - V_t\psi\|^2 \leq \frac{m^2}{4|t|^2\hbar^2} \int_{\mathbb{R}^d} x^4 |\psi(x)|^2 dx \to 0 \ (|t| \to \infty).$$

ゆえに，(3.140) を得る．　□

$|t| \to \infty$ での漸近公式 (3.140) の物理的意味を考察しよう．この公式は，ψ を $t=0$ の状態とすれば，粒子の位置に関する，時刻 t での確率密度 $|\psi(t,x)|^2 = |(e^{-itH_0/\hbar}\psi)(x)|^2$ の $t \sim +\infty$ での漸近的な形が $\left(\frac{m}{t\hbar}\right)^d |\hat{\psi}\left(\frac{mx}{t\hbar}\right)|^2$ であたえられることを示している．これから，次のような，ひとつの興味ある解釈が引き出せる．例 3.3 で述べたように，$|\hat{\psi}(p/\hbar)|^2$ ($p = \hbar k$: 運動量変数) は運動量に関する，時刻 0 での確率密度とみなせる．

いま，時刻 0 の状態 ψ における運動量の確率分布が $p = p_0$ の付近に集中しているとしてみよう（この種の状態は，量子力学的粒子の散乱の実験における初期状態として現われる）．

たとえば，ガウス型の関数

$$\hat{\psi}_0(p/\hbar) := \frac{\hbar^{d/2}}{(2\pi)^{d/4}a^{d/2}} \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{4a^2}\right) \tag{3.141}$$

はそのような状態を記述する関数の例である．ただし，$a>0$ は定数である．容易に見てとれるように，$\|\psi_0\| = 1$ であり，a が小さいほど，関数 $\hat{\psi}_0(p/\hbar)$ は $p = p_0$ に集中しており，$|p|$ が大きくなると $|\hat{\psi}(p/\hbar)|$ は急激に小さくなる．関数 $\hat{\psi}_0$ によって表わされる状態は（運動量空間における）**ガウス型の波束** (wave packet) とよばれる．定数 a を波束 $\hat{\psi}_0$ の幅という．これは，ガウス型の波束 $\hat{\psi}_0$ の p_0 のまわりでの広がりの尺度をあたえる．状態 ψ_0 は，ある精度の範囲内で，運動量が p_0 に確定している状態とみなせる．実際，この状態における運動量演算子 P_j^{S} の期待値は

$$E_{\psi_0}(P_j^{\mathrm{S}}) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\psi}_0(p/\hbar)^* p_j \hat{\psi}_0(p/\hbar)\hbar^{-d} dp = p_{0,j}$$

であり ($p_0 = (p_{0,1}, \cdots, p_{0,d}) \in \mathbb{R}^d$)，分散（不確定さの 2 乗）は

$$(\Delta P_j^{\mathrm{S}})_{\psi_0}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\psi}_0(p/\hbar)^* (p_j - p_{0,j})^2 \hat{\psi}_0(p/\hbar)\hbar^{-d} dp = a^2$$

である．したがって，a が小さければ小さいほど運動量の不確定さは小さくなる．また，波束の幅 a は状態 ψ_0 における運動量の不確定さを表わすことがわかる．

さて，上述の状態 $\psi(t,\cdot)$ の $t \sim +\infty$ での位置の確率分布は，$mx/t = p_0$ をみたす点 x，すなわち，位置 $x_\infty(t) := p_0 t/m$ の付近に集中することになる．他

方，この $x_\infty(t)$ という点は，古典力学的に見た場合，質量 m の自由粒子が速度 p_0/m で運動するとき，それが十分大きな時刻 t で占める位置にほかならない（$t=0$ での位置を x_0 とすれば，そのような自由粒子の時刻 t における位置は $x(t) := (p_0t/m)+x_0$ であるが，$|t|$ が十分大きければ，$x(t)\simeq x_\infty(t)$ とみなせる）．こうして，いま考えたような初期状態に対しては，量子力学的自由粒子は，十分大きな時刻においては，確率分布の意味で，古典的自由粒子のように振舞うことがわかる．

次に，自由粒子の空間的確率分布が $t\to\infty$ のときどうなるかを調べよう．次の事実が成り立つ：

定理 3.45 任意の $R>0$ と $\psi\in\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\lim_{|t|\to\infty}\int_{|x|\le R}|(e^{-itH_0/\hbar}\psi)(x)|^2dx=0. \tag{3.142}$$

証明 $t\to+\infty$ の場合だけを示す（$t\to-\infty$ の場合も同様）．χ_R を $\{x\in\mathbb{R}|\ |x|\le R\}$ の定義関数とする．かけ算演算子としての χ_R は有界であるから，定理 3.44 によって，

$$\|\chi_R e^{-itH_0/\hbar}\psi-\chi_R V_t\psi\|\to 0\ (t\to\infty).$$

一方，

$$\|\chi_R V_t\psi\|^2=\int_{|k|\le mR/(t\hbar)}|\hat{\psi}(k)|^2dk.$$

したがって，$\lim_{t\to\infty}\|\chi_R V_t\psi\|^2=0$．ゆえに，

$$\lim_{t\to\infty}\|\chi_R e^{-itH_0/\hbar}\psi\|^2=0.$$

これを陽に書き下せば，(3.142) の $t\to\infty$ の場合をあたえる． □

定理 3.45 は，物理的には次のように解釈される：自由ハミルトニアン H_0 による状態の時間発展においては，粒子が R^d の任意の有界領域内にとどまる確率は，十分時間がたつと $(t\sim+\infty)$ 0 に近づくことを意味する．したがって，この場合，粒子的描像では，時間が十分たつと，1 に近い確率で，粒子は無限遠に飛び去っていくと解釈され，自然な物理的描像と一致する．

注意　以上の議論は，(3.56) 式によって定義される N 粒子系の自由ハミルトニアン $H_0^{(N)}$ に対しても容易に拡張される．これを最も簡単に行なうには座標のスケール変換を考えればよい．実際，$\psi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})$ に対して，

$$(U\psi)(x_1, \cdots, x_N) = \left\{\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{\sqrt{2m_j}}{\hbar}\right)^{d/2}\right\}\psi\left(\frac{\sqrt{2m_1}x_1}{\hbar}, \cdots, \frac{\sqrt{2m_N}x_N}{\hbar}\right),$$
$$(x_1, \cdots, x_N) \in (\mathbb{R}^d)^N,$$

とおけば，U は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})$ 上のユニタリ演算子であり，演算子の等式

$$UD_{j\alpha}U^{-1} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_j}}D_{j\alpha}, \quad j = 1, \cdots, N, \quad \alpha = 1, \cdots, d,$$

が成り立つ．したがって，$L_0 := -\sum_{j=1}^{N}\Delta_{x_j}$（これは dN 次元の一般化されたラプラシアンを -1 倍したもの）とおけば，演算子の等式

$$UL_0U^{-1} = H_0^{(N)}$$

が得られる．ゆえに，$H_0^{(N)}$ の解析は，dN 次元空間上の 1 個の自由粒子のハミルトニアン L_0 の解析に帰着される．たとえば，時間発展については，演算子解析により，

$$e^{-itH_0^{(N)}/\hbar} = Ue^{-itL_0/\hbar}U^{-1}, \quad t \in \mathbb{R},$$

であるから，$e^{-itL_0/\hbar}$ の積分表示（定理 3.42(ii)）から $e^{-itH_0^{(N)}/\hbar}$ の積分表示を導くことができる．

3.7　物理量の時間発展—ハイゼンベルクの描像

この節では，量子系における物理量の時間発展について考察する．

3.7.1　ハイゼンベルク演算子

H を状態のヒルベルト空間，H をハミルトニアンを表わす自己共役演算子，A を H 上の演算子とする．H と A から決まる部分空間 $\mathsf{D}_H(A)$ を

$$\mathsf{D}_H(A) := \{\Psi \in \mathsf{H} | \text{すべての } s \in \mathbb{R} \text{ に対して } e^{isH}\Psi \in \mathsf{D}(A)\} \quad (3.143)$$

によって定義しよう．時刻 0 での状態を $\Psi \in \mathsf{H}$ とすれば，すでに定式化したように，時刻 $t \in \mathbb{R}$ での状態は

$$\Psi(t) = e^{-itH/\hbar}\Psi \quad (3.144)$$

であたえられる．いま，$\Psi \in \mathsf{D}_H(A)$ としよう．このとき，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\Psi(t) \in \mathsf{D}(A)$ である．演算子 $e^{-itH/\hbar}$ はユニタリであるから，$\|\Psi(t)\| = \|\Psi\|$. したがって，時刻 t における状態についての A の期待値 $E_{\Psi(t)}(A)$（式 (3.6) を参照）は

$$E_{\Psi(t)}(A) = \frac{\langle \Psi(t), A\Psi(t) \rangle}{\|\Psi\|^2} \tag{3.145}$$

と表わされる．だが，これは，(3.144) と $(e^{-itH/\hbar})^* = e^{itH/\hbar}$ によって，

$$E_{\Psi(t)}(A) = \frac{\langle \Psi, A(t)\Psi \rangle}{\|\Psi\|^2} = E_\Psi(A(t)) \tag{3.146}$$

と書き直せる．ただし，

$$A(t) := e^{itH/\hbar} A e^{-itH/\hbar} \tag{3.147}$$

である．この演算子をハミルトニアン H によって定まる，A に対する（あるいは A の）**ハイゼンベルク演算子** (Heisenberg operator) とよぶ．

いま，A は物理量を表わすとしよう．すると，等式 (3.146) は，時刻 t の状態における，物理量 A の期待値が演算子 $A(t)$ の，時刻 0 での状態における期待値に等しいことを示している．したがって，物理量の期待値を計算するという意味においては，状態の時間発展，すなわち，シュレーディンガー描像を採用するかわりに，A に対するハイゼンベルク演算子 $A(t)$ を物理量 A の時間発展とみなすことにより，同等の記述が可能になる．この後者の見方を**ハイゼンベルク描像** (Heisenberg picture) という．これは，つまり，系の時間発展を物理量の時間発展としてとらえる見方である．

すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して，$A(t) = A$ となるような物理量 A は，時間がたっても変化しないので，ハミルトニアン H に関する**保存量** (conserved quantity) とよばれる．

演算子解析によれば，$H(t) = H$ が示されるので，ハミルトニアン H 自体は保存量である．

保存量は古典力学においても重要な量であった．そこで，どのような条件のもとで，物理量 A が保存量になるかを考えるのは興味がある．次の結果が得られる．

定理 3.46　物理量 A (したがって，A は自己共役演算子) がハミルトニアン H に関する保存量であるための必要十分条件は，A と H が強可換であることである．

証明　（必要性）A が H に関して保存量ならば，$e^{itH/\hbar}Ae^{-itH/\hbar} = A$ がすべての $t \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ．したがって，補題 3.27(ii) によって，任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して，

$$e^{itH/\hbar}e^{isA}e^{-itH/\hbar} = e^{isA}.$$

すなわち，

$$e^{itH/\hbar}e^{isA} = e^{isA}e^{itH/\hbar}.$$

ゆえに，定理 3.13 によって，A と H は強可換である．

（十分性）H, A が強可換ならば，定理 3.13 によって

$$e^{isA}e^{itH} = e^{itH}e^{isA}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

したがって，任意の $\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ に対して

$$\langle e^{-isA}\Psi, e^{itH}\Phi\rangle = \langle e^{-itH}\Psi, e^{isA}\Phi\rangle.$$

そこで，$\Psi, \Phi \in \mathsf{D}(A)$ とすれば，定理 3.37 によって，両辺は s に関して微分可能であり

$$\langle A\Psi, e^{itH}\Phi\rangle = \langle e^{-itH}\Psi, A\Phi\rangle = \langle \Psi, e^{itH}A\Phi\rangle$$

が得られる．これがすべての $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ に対して成り立つから，$e^{itH}\Phi \in \mathsf{D}(A)$ であり，かつ $Ae^{itH}\Phi = e^{itH}A\Phi$ となる．これは，$e^{itH}A \subset Ae^{itH}$ を意味する．したがって，$A \subset e^{-itH}Ae^{itH}$．両辺ともに自己共役であるから，$A = e^{-itH}Ae^{itH}$ でなければならない．これがすべての t に対して成り立つから，A は保存量である．□

A と H が単に可換であるというだけでは，A は保存量であるとは限らないことを注意しておこう．

例 3.9 自由粒子のハイゼンベルク演算子． d 次元空間 $\mathbb{R}^d$ を運動する，質量 m の自由粒子系を考える．すでにみたように，この系のハミルトニアンは (3.128) 式の H_0 である．位置演算子を $\hat{x} = (\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_d)$，運動量演算子を $\hat{p} = (\hat{p}_1, \cdots, \hat{p}_d)$，$\hat{p}_j = -i\hbar D_j$ とすれば，そのハイゼンベルク演算子は

$$\hat{x}_j(t) = e^{itH_0/\hbar}\hat{x}_j e^{-itH_0/\hbar}, \tag{3.148}$$

$$\hat{p}_j(t) = e^{itH_0/\hbar}\hat{p}_j e^{-itH_0/\hbar}, \tag{3.149}$$

によってあたえられる．これらの演算子の具体的な形を求めることは可能であり，次の定理に述べる公式が得られる．

定理 3.47 すべての $j = 1, \cdots, d$, に対して，

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathsf{D}_{H_0}(\hat{x}_j) \cap \mathsf{D}_{H_0}(\hat{p}_j) \tag{3.150}$$

であり，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上で

$$\hat{x}_j(t) = \hat{x}_j + \frac{\hat{p}_j}{m}t, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.151}$$

が成り立つ．また，各 $\hat{p}_j$ は，H_0 に関して保存量である．すなわち，演算子の等式

$$\hat{p}_j(t) = \hat{p}_j, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.152}$$

が成り立つ．

証明 明らかに，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathsf{D}(\hat{x}_j) \cap \mathsf{D}(\hat{p}_j), j = 1, \cdots, d,$ である．これと定理 3.42(i) を使えば，(3.150) が得られる．定理 3.42 によって，すべての $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ と $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して，

$$(\hat{x}_j e^{-itH_0/\hbar}\psi)(x) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar|t|}\right)^{d/2} e^{-d\pi i\varepsilon(t)/4} \int_{\mathbb{R}} x_j e^{im|x-y|^2/(2t\hbar)}\psi(y)dy.$$

次の関係式に注意しよう．

$$x_j e^{im|x-y|^2/(2t\hbar)} = y_j e^{im|x-y|^2/(2t\hbar)} - \frac{t\hbar}{mi}\frac{\partial}{\partial y_j}e^{im|x-y|^2/(2t\hbar)}.$$

したがって，部分積分によって，

$$\begin{aligned}\hat{x}_j e^{-itH_0/\hbar}\psi &= e^{-itH_0/\hbar}\hat{x}_j\psi + \frac{t\hbar}{mi}e^{-itH_0/\hbar}D_j\psi \\ &= e^{-itH_0/\hbar}\hat{x}_j\psi + \frac{t}{m}e^{-itH_0/\hbar}\hat{p}_j\psi\end{aligned}$$

を得る．そこで，左から $e^{itH_0/\hbar}$ を作用させれば，(3.151) が得られる．

運動量演算子に関しては，(3.59) とかけ算演算子の組 $\{\hbar k_1, \cdots, \hbar k_d\}$ の強可換性によって（例 3.2 を参照），$\{\hat{p}_1, \cdots, \hat{p}_d\}$ は強可換である．このとき，各 $\hat{p}_j$ は H_0 と強可換であることがわかる（フーリエ変換に移って考えよ）．ゆえに，定理 3.46 によって，$\hat{p}_j$ は保存量である． □

上の例では，ハイゼンベルク演算子

$$\hat{x}(t) := (\hat{x}_1(t), \cdots, \hat{x}_d(t)),\ \hat{p}(t) := (\hat{p}_1(t), \cdots, \hat{p}_d(t)),$$

の形は，古典的な自由粒子の軌道の公式とまったく同じ形をしている．これは，古典力学との対応において，ハイゼンベルク演算子が物理量の時間発展を記述するという解釈にひとつの支持をあたえる．

3.7.2 ハイゼンベルクの運動方程式

ハイゼンベルク演算子は物理量の時間発展を記述するものと考えられた．では，それはどのような微分方程式にしたがうであろうか．次にこの問題を考えてみよう．そのため，演算子値関数に対して，微分の概念を導入する．以前と同様，$\mathfrak{B}(\mathsf{H})$ によって，H 上の有界演算子のつくるバナッハ空間を表わす．一般に，開区間 $I = (a, b)$ 上の $\mathfrak{B}(\mathsf{H})$-値関数 $A(t)$（すなわち，各 t に対して，H 上の有界演算子 $A(t)$ をただひとつ定める写像）は，すべての $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，H-値関数 $A(t)\Psi$ が I 上で強連続（強微分可能）であるとき，強連続（強微分可能）であるという．$A(t)$ が強微分可能な場合，その導関数 $A'(t)$ を

$$A'(t)\Psi = \frac{dA(t)\Psi}{dt}$$

によって定義する．しばしば，

$$A'(t) = \frac{dA(t)}{dt} = \frac{d}{dt}A(t)$$

などと記す．

強微分可能な $\mathfrak{B}(\mathsf{H})$-値関数が関わる解析においては，通常の微積分学の場合と同様に，そのような関数の積に関する微分公式が必要になる．しかし，これを定式化するには少し準備を要する．1 章 1.2.6 項でノルム空間とバナッハ空間の概念を定義した．これらの空間上でも有界線形演算子の概念は，ヒルベルト空間の場合と全く同様に定義される．次の定理は関数解析における基本定理のひとつである：

定理 3.48 バナッハ-シュタインハウス (Steinhaus) **の定理**[*33]．X をバナッハ空間，Y をノルム空間とし，$\mathfrak{T}$ を X から Y への有界線形演算子の族とする．各 $\Psi \in \mathsf{X}$ に対して，実数の部分集合 $\{\|T\Psi\|_{\mathsf{Y}} \mid T \in \mathfrak{T}\}$ は有界であるとしよう．すなわち，Ψ に依存する定数 $C_\Psi > 0$ が存在して，$\sup_{T\in\mathfrak{T}} \|T\Psi\| \le C_\Psi$ が成り立つと仮定する．このとき，$\sup_{T\in\mathfrak{T}} \|T\| < \infty$ が成り立つ．

証明 $T \in \mathfrak{T}$ を任意にひとつ固定し，$\mathsf{X}_n = \{\Psi \in \mathsf{X} \mid \|T\Psi\| \le n\}$ とおく．このとき，各 $\Psi \in \mathsf{X}$ はどこかの X_n に含まれる．したがって，$\mathsf{X} = \cup_{n=1}^{\infty}\mathsf{X}_n$ となる．T の有界性によって，X_n は閉集合である．したがって，ベール-ハウスドルフの定理（補題 2.17）によって，ある番号 N と点 $\Psi_0 \in \mathsf{X}_N$ があって，十分小さい $\delta > 0$ をとれば，$\{\Psi \in \mathsf{X} | \, \|\Psi_0 - \Psi\| < \delta\} \subset \mathsf{X}_N$ が成立する．いま，$\|\Psi\| < \delta$ とすれば，$\|(\Psi + \Psi_0) - \Psi_0\| < \delta$ となるから，$\Psi + \Psi_0 \in \mathsf{X}_N$．したがって，$\|T(\Psi+\Psi_0)\| \le N$．ゆえに，$\|T\Psi\| \le \|T(\Psi+\Psi_0)\| + \|T\Psi_0\| \le N + C_{\Psi_0} \equiv C$．ここで，定数 C は $T \in \mathfrak{T}$ に依存しないことに注意しよう．零ベクトルでない，任意の $\Psi \in \mathsf{X}$ に対しては，$0 < \alpha < \delta$ なる α をひとつ固定して $\Phi = \alpha\Psi/\|\Psi\|$ とおけば，$\|\Phi\| = \alpha < \delta$ であるから，いまの結果が適用できて $\|T\Phi\| \le C$．一方，左辺は，$\alpha\|T\Psi\|/\|\Psi\|$ であるから $\|T\Psi\| \le (C/\alpha)|\Psi|$ が得られる．これは，$\|T\| \le C/\alpha$ を意味し，したがって，$\{\|T\| \, |T \in \mathfrak{T}\}$ は有界である． □

[*33] **一様有界性の原理** (principle of uniform boundedness) ともいう．

バナッハ-シュタインハウスの定理の応用の基本例をあげよう．まず，有界演算子の列に関して，次の有用な事実がある．

定理 3.49 H, K をヒルベルト空間，$A_n \in \mathfrak{B}(\mathsf{H},\mathsf{K})$ とし，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，$\lim_{n\to\infty} A_n\Psi$ が存在するとする．このとき，

$$A\Psi := \lim_{n\to\infty} A_n\Psi$$

によって定義される写像 $A : \mathsf{H} \to \mathsf{K}$ は有界演算子である．

証明 A が線形であることは容易にわかる．収束列は有界であるから，$\sup_{n\geq 1} \|A_n\Psi\| < \infty$．これとバナッハ-シュタインハウスの定理により，$n$ によらない定数 $C > 0$ が存在して，$\|A_n\| \leq C$．したがって，

$$\|A\Psi\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n\Psi\| \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \|A_n\| \, \|\Psi\| \leq C\|\Psi\|.$$

ゆえに，A は有界である． □

定理 3.49 は非可算個の集合によって添字づけられた有界演算子の集合に対して拡張されうる．たとえば，次の定理は，以下の解析で要となる事実のひとつである．

定理 3.50 $t \to A(t)$ を $[a, b]$ 上で強連続な $\mathfrak{B}(\mathsf{H})$-値関数とする．このとき，定数 $C > 0$ が存在して，

$$\|A(t)\| \leq C, \quad t \in [a, b].$$

さらに，$A(t)$ が強微分可能ならば，$A'(t)$ は有界演算子である．

証明 $\mathfrak{T} := \{A(t) | t \in [a, b]\}$ は H 上の有界演算子の族である．各 $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，$\|A(t)\Psi\|$ は t の連続関数であるから，Ψ に依存する定数 C_Ψ が存在して，$\sup_{t\in[a,b]} \|A(t)\Psi\| \leq C_\Psi$ となる．したがって，バナッハ-シュタインハウスの定理が応用できるので，求める結果を得る．

演算子 $A(t)$ が強微分可能であるとしよう．このとき，$A'(t)$ が線形演算子であることは容易にわかる．$t \in [a, b]$ を固定する．実数 $h \neq 0$ に対して，$B_h(t) = [A(t+$

$h) - A(t)]/h$ とすれば，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，$\|B_h(t)\Psi - A'(t)\Psi\| \to 0$ $(h \to 0)$. したがって，$\lim_{h\to 0}\|B_h(t)\Psi\| = \|A'(t)\Psi\| \cdots (*)$. これは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，定数 $h_0 > 0$ が存在して，$|h| \le h_0$ ならば，$\|B_h(t)\Psi\| \le \|A'(t)\Psi\| + \varepsilon$ を意味する．したがって，$\sup_{h\in\mathbb{R};\ |h|\le h_0}\|B_h(t)\Psi\| \le \|A'(t)\Psi\| + \varepsilon < \infty$. ゆえに，バナッハ-シュタインハウスの定理によって，$C := \sup_{h\in\mathbb{R};\ |h|\le h_0}\|B_h(t)\| < \infty$. これと $(*)$ によって，

$$\|A'(t)\Psi\| \le \overline{\lim_{h\to 0}}\,\|B_h(t)\|\,\|\Psi\| \le C\|\Psi\|.$$

ゆえに，$A'(t)$ は有界演算子である．□

次の補題は，$\mathfrak{B}(\mathsf{H})$-値関数の積およびその微分に関する基本的な事実である．

補題 3.51

(i) $A(t), B(t)$ を $[a,b]$ 上で強連続な $\mathfrak{B}(\mathsf{H})$-値関数とするとき，$A(t)B(t)$ は $[a,b]$ 上で強連続である．

(ii) $A(t), B(t)$ を (a,b) 上で強微分可能な有界演算子とする．このとき，$A(t)B(t)$ は (a,b) 上で強微分可能であって，次の公式が成り立つ[*34]：

$$(A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t).$$

証明　(i) 任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\|A(t+\varepsilon)B(t+\varepsilon)\Psi - A(t)B(t)\Psi\| \\
&= \|A(t+\varepsilon)[B(t+\varepsilon) - B(t)]\Psi + [A(t+\varepsilon) - A(t)]B(t)\Psi\| \\
&\le \|A(t+\varepsilon)[B(t+\varepsilon) - B(t)]\Psi\| + \|[A(t+\varepsilon) - A(t)]B(t)\Psi\| \\
&\le \|A(t+\varepsilon)\|\,\|[B(t+\varepsilon) - B(t)]\Psi\| + \|[A(t+\varepsilon) - A(t)]B(t)\Psi\|.
\end{aligned}$$

定理 3.50 を使えば，定数 $C > 0$ が存在して，$\sup_{s\in[a,b]}|A(s)| \le C$. したがって，

$$\begin{aligned}
&\|A(t+\varepsilon)B(t+\varepsilon)\Psi - A(t)B(t)\Psi\| \\
&\le C\|[B(t+\varepsilon) - B(t)]\Psi\| + \|[A(t+\varepsilon) - A(t)]B(t)\Psi\| \\
&\to 0 \quad (\varepsilon \to 0).
\end{aligned}$$

[*34] 通常の微積分学における**ライプニッツ則 (Leibniz rule)** とよばれる公式の演算子版である．

ゆえに，$A(t)B(t)$ は強連続である．

(ii) 恒等式

$$\begin{aligned}\frac{A(t+\varepsilon)B(t+\varepsilon)-A(t)B(t)}{\varepsilon} &= A(t+\varepsilon)\left(\frac{B(t+\varepsilon)-B(t)}{\varepsilon}-B'(t)\right)\\ &\quad +(A(t+\varepsilon)-A(t))B'(t)+A(t)B'(t)\\ &\quad +\left(\frac{A(t+\varepsilon)-A(t)}{\varepsilon}-A'(t)\right)B(t)\\ &\quad +A'(t)B(t)\end{aligned}$$

および $\|A(t)\|$ が各点 t の近傍で一様有界であること（定理 3.50）に注意して，(i) と同様に評価すればよい． □

さて，ハイゼンベルク演算子がしたがう方程式の導出に移ろう．技術的な煩雑さを避けるため，まず，ハミルトニアン H も物理量 A も有界な場合を考察する．

定理 3.52 H をヒルベルト空間，$A, H \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$, H は自己共役とする．このとき，H に関する，A のハイゼンベルク演算子 $A(t)$ は有界である．さらに，それは，$\mathbb{R}$ 上で強連続かつ強微分可能であって，微分方程式

$$\frac{dA(t)}{dt}=\frac{i}{\hbar}[H, A(t)] \tag{3.153}$$

をみたす．

証明 $A(t)$ の有界性は明らか．また，補題 3.51(i) によって，$A(t)$ は強連続である．(3.153) は補題 3.51(ii) と

$$\frac{d}{dt}e^{itH/\hbar}=\frac{iH}{\hbar}e^{itH/\hbar}$$

を用いればよい（H と $e^{itH/\hbar}$ は可換であることに注意）． □

一般に，演算子 H（自己共役である必要はない）をあたえたとき，(3.153) は，$A(t)$ を未知の演算子値関数とする微分方程式とみることができる．この型の方程式を H から定まる**ハイゼンベルクの運動方程式** (Heisenberg equation of motion) あるいは単に**ハイゼンベルク方程式**とよぶ．

定理3.52は，H が有界な自己共役演算子で，A を有界演算子とするとき，初期条件 $A(0)=A$ をみたす，ハイゼンベルク方程式の解のひとつが A の H に関するハイゼンベルク演算子 $A(t)$ であたえられること示している．実はこの逆も成立する：

定理 3.53　H, A を有界演算子，H は自己共役であるとする．このとき，ハイゼンベルクの運動方程式 (3.153) をみたす強微分可能な有界演算子 $A(t)$ で $A(0)=A$ となるものはただひとつ存在し，それは A に対するハイゼンベルク演算子に等しい．

証明　解の存在はすでに示したので，一意性だけを証明すればよい．$A(t)$ と同じ条件をみたす演算子 $B(t)$ があったとしよう．このとき，$C(t)=A(t)-B(t)$ とおけば，$C(0)=A-A=0$ である．また，$D(t)=e^{-itH/\hbar}C(t)e^{itH/\hbar}$ とおけば，補題3.51(ii) によって，$D(t)$ は強微分可能であって，

$$
\begin{aligned}
\frac{dD(t)}{dt} &= \frac{de^{-itH/\hbar}}{dt}C(t)e^{itH/\hbar}+e^{-itH/\hbar}\frac{dC(t)}{dt}e^{itH/\hbar}+e^{-itH/\hbar}C(t)\frac{de^{itH/\hbar}}{dt}\\
&= \frac{-i}{\hbar}e^{-itH/\hbar}[H,C(t)]e^{itH/\hbar}+e^{-itH/\hbar}\frac{dC(t)}{dt}e^{itH/\hbar}
\end{aligned}
$$

となる．ところが，$C(t)$ もハイゼンベルク方程式をみたすから，この式の右辺は0になる．したがって，$dD(t)/dt=0$．ゆえに，任意の $\Psi\in\mathsf{H}$ に対して，$D(t)\Psi=D(0)\Psi=0$．これは，$C(t)e^{itH/\hbar}\Psi=0$ を意味する．$e^{itH/\hbar}$ は全射であるから，結局，$C(t)=0$．よって，$A(t)=B(t)$．　□

3.7.3　一般化されたハイゼンベルクの運動方程式

次に H または A が必ずしも有界ではない場合のハイゼンベルク演算子 $A(t)$ のみたす方程式を考察しよう．この場合でも，形式的には，$A(t)$ はハイゼンベルクの運動方程式をみたすことは容易にわかる．しかし，非有界演算子の場合，定義域の問題が絡んでくるので，形式的計算が厳密に意味をもつかどうかただちには明らかではない．この問題を厳密な形で定式化するためにはいくつか概念を導入する必要がある．

各 $t\in\mathbb{R}$ に対して（必ずしも有界ではない）演算子 $A(t)$ があたえられ，H の稠密な部分空間 D が存在して，すべての $t\in\mathbb{R}$ に対して $\mathsf{D}\subset\mathsf{D}(A(t))$ をみた

すとする．任意の $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathsf{D}$ に対して $\langle \Psi_1, A(t)\Psi_2 \rangle$ が微分可能であって，D を定義域とする演算子 $B(t)$ が存在して，

$$\frac{d}{dt}\langle \Psi_1, A(t)\Psi_2 \rangle = \langle \Psi_1, B(t)\Psi_2 \rangle$$

が成り立つとき，$A(t)$ は D 上で**弱微分可能** (weakly differentiable) であるという．この場合，

$$B(t) = \text{w-}\frac{dA(t)}{dt}$$

と書き，これを $A(t)$ の D 上での**弱微分** (weak derivative) とよぶ．$A(t)$ が D 上で強微分可能ならば，それは D 上で弱微分可能であり，$dA(t)/dt = \text{w-}dA(t)/dt$ が成り立つ．だが，逆は一般には成立しない（章末演習問題 2 を参照）．

A, B を稠密に定義された演算子とし，$\mathsf{D}(A^*) \cap \mathsf{D}(B^*) \cap \mathsf{D}(A) \cap \mathsf{D}(B)$ は稠密であるとする．また，$\mathsf{D} \subset \mathsf{D}(A^*) \cap \mathsf{D}(B^*) \cap \mathsf{D}(A) \cap \mathsf{D}(B)$ を稠密な部分空間とする．$\mathsf{D} \subset \mathsf{D}(C)$ をみたす演算子 C が存在して，

$$\langle A^*\Psi, B\Phi \rangle - \langle B^*\Psi, A\Phi \rangle = \langle \Psi, C\Phi \rangle, \quad \Psi \in \mathsf{D},$$

が成り立つとき，A, B は D 上で**弱交換子** (weak commutator) C をもつといい，記号的に

$$C \restriction \mathsf{D} = [A, B]_{\text{w}}$$

と書く．この場合，明らかに，

$$[A, B]_{\text{w}} = -[B, A]_{\text{w}}$$

である．A, B が有界演算子ならば，$[A, B]_{\text{w}} = [A, B]$ となって普通の交換子と一致する．この意味で弱交換子は普通の交換子のひとつの一般化である．

H 上の自己共役演算子 H があたえられたとき，これに付随する，演算子のクラスをひとつ導入する．

定義 3.54　稠密に定義された演算子 A が演算子の集合 $\mathfrak{A}_H$ に属するとは次の条件 (i)～(iii) がみたされることをいう：

(i)　ある稠密な部分空間 $\mathsf{D}_A \subset \mathsf{D}(H)$ が存在して，すべての $s \in \mathbb{R}$ に対して，$e^{isH}\mathsf{D}_A \subset \mathsf{D}(A) \cap \mathsf{D}(A^*)$.

(ii)　部分空間

$$\mathsf{D}_{A,H} := \mathcal{L}\left(\{e^{isH}\Psi | \Psi \in \mathsf{D}_A, s \in \mathbb{R}\}\right)$$

上で，弱交換子 $[H, A]_{\mathrm{w}}$ が存在する.

(iii)　任意の $\Psi \in \mathsf{D}_A$ に対して，二つの H-値関数：$s \to Ae^{isH}\Psi$; $s \to A^*e^{isH}\Psi$ はそれぞれ強連続である.

注意　(i), (ii) は $\mathsf{D}_A \subset \mathsf{D}_{A,H} \subset \mathsf{D}(A) \cap \mathsf{D}(A^*) \cap \mathsf{D}(H)$ を意味する.

演算子解析により，$H \in \mathfrak{A}_H$ であることは容易に確かめられる（この場合，D_H として，たとえば，$\mathsf{D}(H)$ をとればよい）. したがって，$\mathfrak{A}_H \neq \emptyset$. また，$H$ が有界ならば，$\mathfrak{B}(\mathsf{H}) \subset \mathfrak{A}_H$ である.

$A \in \mathfrak{A}_H$ ならば，上の条件 (i)(ii) のおかげで，H に関する，A および A^* のハイゼンベルク演算子 $A(t), (A^*)(t)$ が $\mathsf{D}_{A,H}$ 上で定義され，

$$A(t)^*\Psi = (A^*)(t)\Psi, \quad \Psi \in \mathsf{D}_{A,H}$$

が成り立つ. さらに，条件 (ii) は $\mathsf{D}_{A,H}$ 上で弱交換子 $[H, A(t)]_{\mathrm{w}}$ が存在することを保証し，

$$[H, A(t)]_{\mathrm{w}}\Psi = e^{itH/\hbar}[H, A]_{\mathrm{w}}e^{-itH/\hbar}\Psi, \quad \Psi \in \mathsf{D}_{A,H} \tag{3.154}$$

が成立する.

以上の準備のもとで，H, A が必ずしも有界ではない場合のハイゼンベルク演算子に対する方程式を定式化できる. すなわち，次の定理が成り立つ.

定理 3.55　H を H 上の自己共役演算子，$A \in \mathfrak{A}_H$ としよう. このとき，ハイゼンベルク演算子 $A(t), A(t)^*$ は $\mathsf{D}_{A,H}$ 上で弱微分可能であり，$\mathsf{D}_{A,H}$ 上で

$$\text{w-}\frac{dA(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, A(t)]_{\mathrm{w}}, \tag{3.155}$$

$$\text{w-}\frac{dA(t)^*}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, A(t)^*]_{\mathrm{w}}, \tag{3.156}$$

が成り立つ.

証明 $\Psi, \Phi \in \mathsf{D}_{A,H}$ としよう．まず，

$$\left\langle \Psi, \frac{A(t+\varepsilon)-A(t)}{\varepsilon}\Phi \right\rangle = \left\langle e^{-itH/\hbar}\frac{e^{-i\varepsilon H/\hbar}-1}{\varepsilon}\Psi, Ae^{-i(t+\varepsilon)H/\hbar}\Phi \right\rangle + \left\langle A(t)^*\Psi, \frac{e^{-i\varepsilon H/\hbar}-1}{\varepsilon}\Phi \right\rangle$$

と書けることに注意する．$\Psi \in \mathsf{D}(H)$ であるから，

$$\text{s-}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{-i\varepsilon H/\hbar}-1}{\varepsilon}\Psi = -\frac{i}{\hbar}H\Psi.$$

Ae^{isH} の D_A 上での強連続性によって

$$\text{s-}\lim_{\varepsilon\to 0} Ae^{-i(t+\varepsilon)H/\hbar}\Phi = Ae^{-itH/\hbar}\Phi.$$

したがって，

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\left\langle \Psi, \frac{A(t+\varepsilon)\Psi - A(t)\Psi}{\varepsilon}\Phi \right\rangle \\
&= \frac{i}{\hbar}\langle e^{-itH/\hbar}H\Psi, Ae^{-itH/\hbar}\Phi\rangle - \frac{i}{\hbar}\langle A(t)^*\Psi, H\Phi\rangle \\
&= \frac{i}{\hbar}\langle \Psi, [H, A(t)]_{\mathrm{w}}\Phi\rangle
\end{aligned}$$

を得る．ゆえに，(3.155) を得る．(3.156) についても同様である． □

方程式 (3.155) を**一般化されたハイゼンベルクの運動方程式** (generalized Heisenberg equation) とよぼう．量子力学の文脈ではこの意味でのハイゼンベルクの運動方程式の方がより重要である．なぜなら，量子力学への応用では，多くの場合，ハミルトニアンおよび考察の対象となる物理量は非有界演算子で表わされるからである．

定理 3.55 はハイゼンベルク演算子のあらわな形を求めるのにも使うことができる．その考え方は次の通りである．弱交換子 $[H, A]_{\mathrm{w}}$ を計算し，もし，これが簡単な形になるならば，一般化されたハイゼンベルク方程式 (3.155) も簡単な形になると予想される．そこで，この方程式のあらわな解を求めるのである．もちろん，この場合，導出された方程式の解の一意性を証明しておかなければ

ならない．たとえば，自由粒子のハイゼンベルク演算子はこの方法でも求めることができる．

一般化されたハイゼンベルク方程式の解の一意性については次の定理が成り立つ：

定理 3.56　H を自己共役演算子，$A \in \mathfrak{A}_H$ とする．このとき，$\mathsf{D}_{A,H}$ 上で一般化されたハイゼンベルク方程式をみたし，かつ次の付帯条件：

(i)　$\mathsf{D}_{A,H} \subset \mathsf{D}(A(t)) \cap \mathsf{D}(A(t)^*)$, $t \in \mathbb{R}$；

(ii)　$t \to A(t)$ は $\mathsf{D}_{A,H}$ 上で強連続；

(iii)　任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し，$t \to A(t)^* e^{iatH}$ は D_A 上で強連続；

(iv)　$A(0) = A$；

を満足する演算子 $A(t)$ はただひとつ存在し，それは，D_A 上では，H に関する A のハイゼンベルク演算子に等しい．

証明　$A \in \mathfrak{A}_H$ のとき，定理 3.55 によって，A のハイゼンベルク演算子 $A(t)$ は定理の条件をすべてみたす．そこで，定理の条件をすべてみたす演算子がもうひとつあったとして，それを $B(t)$ としよう．このとき，任意の $\Psi \in \mathsf{D}_A$ に対して $A(t)\Psi = B(t)\Psi$ を示せばよい．そのために，定理 3.53 の証明と同様に，$C(t) = A(t) - B(t)$ とおき，$D(t) = e^{-itH/\hbar} C(t) e^{itH/\hbar}$ を考える．このとき，$\mathsf{D}_A \subset \mathsf{D}(D(t))$ であり，

$$L_\varepsilon = \frac{e^{i\varepsilon H/\hbar} - 1}{\varepsilon}$$

とおけば，任意の $\Psi, \Phi \in \mathsf{D}_A$ に対して，

$$\begin{aligned}\left\langle \Psi, \frac{D(t+\varepsilon) - D(t)}{\varepsilon}\Phi \right\rangle &= \left\langle C(t+\varepsilon)^* e^{i(t+\varepsilon)H/\hbar}\Psi, L_\varepsilon e^{itH/\hbar}\Phi \right\rangle \\ &\quad + \left\langle e^{itH/\hbar} L_\varepsilon \Psi, C(t+\varepsilon) e^{itH/\hbar}\Phi \right\rangle \\ &\quad + \left\langle e^{itH/\hbar}\Psi, \frac{C(t+\varepsilon) - C(t)}{\varepsilon} e^{itH/\hbar}\Phi \right\rangle\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\langle \Psi, \frac{D(t+\varepsilon)-D(t)}{\varepsilon}\Phi\right\rangle = \frac{i}{\hbar}\left\langle C(t)^* e^{itH/\hbar}\Psi, He^{itH/\hbar}\Phi\right\rangle - \frac{i}{\hbar}\left\langle e^{itH/\hbar}H\Psi, C(t)e^{itH/\hbar}\Phi\right\rangle + \left\langle e^{itH/\hbar}\Psi, \text{w-}\frac{dC(t)}{dt}\Phi\right\rangle$$

を得る．$C(t)$ も $\mathsf{D}_{A,H}$ 上で一般化されたハイゼンベルク方程式 (3.155) をみたすから，いま得た結果は $d\langle\Psi, D(t)\Phi\rangle/dt = 0$ を意味する．これと $D(0)=0$ から，$\langle\Psi, D(t)\Phi\rangle = 0$ を得る．D_A は稠密であるから，$D(t)\Phi = 0$，したがって，$C(t)e^{itH/\hbar}\Phi = 0$．ゆえに，任意の $\Psi\in\mathsf{D}_A$ に対して，$\langle C(t)^*\Psi, e^{itH/\hbar}\Phi\rangle = 0$．$e^{itH/\hbar}\mathsf{D}_A$ は稠密であるから，$C(t)^*\Psi = 0$ を得る．これから，D_A 上で $C(t) = 0$ が導かれる． □

3.8 例：調和振動子

これまで，量子系の例として詳しく論じたのは，自由粒子の系だけであった．この系のハミルトニアン，すなわち，自由ハミルトニアンのスペクトルは連続的であることが示された．しかし，原子のエネルギー準位のように，微視的な系の物理量の観測値は離散的に分布する場合もある．このような場合は，古典物理学では扱えない，微視的な世界の特質がはっきりと現われているわけである．そこで，これまで定式化してきた量子力学の理論的枠組みにおいて，量子系のエネルギーがとびとびの値をとるようなモデルが存在することを示すことが望まれる．そのようなモデルのうちで最も簡単なのは，古典的な 1 次元調和振動子の正準量子化によって得られるモデル，すなわち，**調和振動子** (harmonic oscillator) である．この節ではこのモデルの解析を行なう．

3.8.1 一般の CCR の表現における解析

古典力学における 1 次元調和振動子のハミルトニアンは，(3.44) において，$d = N = 1$ で V が

$$V_{\mathrm{os}}(x) = \frac{Kx^2}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.157}$$

という形であたえられる場合である．ただし，$K > 0$ は振動子のばね定数である．対応する量子系の状態のヒルベルト空間を H として，そこにおいて，自由度 1 の CCR の表現 $\{\mathsf{H}, \mathsf{D}, \{Q, P\}\}$ が実現していると仮定しよう．すなわち，Q, P は H 上の自己共役演算子，D は $\mathsf{D} \subset \mathsf{D}(QP) \cap \mathsf{D}(PQ)$ をみたす稠密な部分空間であり，

$$[Q, P] = i\hbar I \quad (\mathsf{D}\text{ 上で}) \tag{3.158}$$

が成立するとする．さらに，簡単のため，Q, P は D を不変にするとしよう．CCR のこのような表現のひとつとしてシュレーディンガー表現があるが，ここでは，さしあたって，表現を特定しないで話を進める．つまり，まず，表現に依存しない部分を論じるのである．シュレーディンガー表現をとった場合の結果は後に述べることにする．

古典的ハミルトニアン (3.44) に対応する量子系のハミルトニアン (3.47) で $d = N = 1, V = V_{\mathrm{os}}$ の場合を考えると，1 次元調和振動子の正準量子化でのハミルトニアンは

$$H_{\mathrm{os}} := \frac{P^2}{2m} + \frac{K}{2}Q^2 \tag{3.159}$$

であたえられることになる．演算子の和の定義（1 章 1.2.1 項を参照）にしたがって，

$$\mathsf{D}(H_{\mathrm{os}}) = \mathsf{D}(P^2/2m) \cap \mathsf{D}(KQ^2/2) = \mathsf{D}(P^2) \cap \mathsf{D}(Q^2).$$

したがって，$\mathsf{D} \subset D(H_{\mathrm{os}})$ である．これと Q, P のエルミート性および $Q^2 \geq 0$, $P^2 \geq 0$ に注意すれば，H_{os} は非負の対称演算子であることがわかる．ハミルトニアン H_{os} が物理量であるためには，それが自己共役であることを示さなければならないが，この問題は H_{os} の固有値問題と一緒に考察することにする．

$H_{\rm os}$ は Q, P の 2 次式であることに注目して，これを “因数分解”することを考える．角振動数

$$\omega := \sqrt{\frac{K}{m}} \tag{3.160}$$

を導入すると，

$$H_{\rm os} := \frac{1}{2m}(P^2 + m^2\omega^2 Q^2) \tag{3.161}$$

と書ける．そこで，演算子 A を

$$A := \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(P - im\omega Q) \upharpoonright \mathsf{D} \tag{3.162}$$

によって定義すれば，これは稠密に定義されており，$\mathsf{D}(A^*) \supset \mathsf{D}$ である．したがって，$\mathsf{D}(A^*)$ は稠密であるから，A は可閉演算子である（命題 2.13 を参照）．Q, P のエルミート性によって，

$$A^* = -\frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(P + im\omega Q) \quad (\mathsf{D}\text{ 上で}) \tag{3.163}$$

が成立する．(3.158) は A, A^* の交換関係

$$[A, A^*] = I \quad (\mathsf{D}\text{ 上で}) \tag{3.164}$$

と同値である．

注意 交換関係 (3.164) およびその（自由度 d の場合への）一般化

$$[A_j, A_k^*] = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \cdots, d,$$

も CCR とよばれることがある．

(3.158) を用いる簡単な計算によって，

$$H_{\rm os} = \hbar\omega A^* A + \frac{\hbar\omega}{2} \quad (\mathsf{D}\text{ 上で}) \tag{3.165}$$

と表わされる．そこで，

$$N_A := (\bar{A})^* \bar{A} = A^* \bar{A} \tag{3.166}$$

とおく（$\bar{A}$ は A の閉包; $(\bar{A})^* = A^*$ に注意）．この演算子について次の事実が成立する：

補題 3.57 N_A は非負の閉対称演算子である．

証明 $\mathsf{D} \subset \mathsf{D}(N_A)$ であり，N_A が非負の対称演算子であることは容易にわかる（任意の $\Psi \in \mathsf{D}(N_A)$ に対して，$\langle \Psi, N_A\Psi\rangle = \|\bar{A}\Psi\|^2 \geq 0$）．そこで，$N_A$ の閉性を示す．$\Psi_n \in \mathsf{D}(N_A), \Psi_n \to \Psi \in \mathsf{H}$, $N_A\Psi_n \to \Phi \in \mathsf{H}$ $(n \to \infty)$ としよう．このとき，

$$\|\bar{A}\Psi_n - \bar{A}\Psi_m\|^2 = \langle \Psi_n - \Psi_m, N_A(\Psi_n - \Psi_m)\rangle \to 0 \quad (n, m \to \infty).$$

したがって，$\bar{A}\Psi_n \to \eta \in \mathsf{H}$ $(n \to \infty)$ となる η が存在する．$\bar{A}$ は閉であるから，$\Psi \in \mathsf{D}(\bar{A})$ かつ $\bar{A}\Psi = \eta$．また，$\bar{A}^*$ の閉性により，$\eta \in \mathsf{D}(\bar{A}^*)$ かつ $\bar{A}^*\eta = \Phi$．したがって，$\bar{A}\Psi \in \mathsf{D}(\bar{A}^*)$(i.e., $\Psi \in \mathsf{D}(N_A)$) かつ $N_A\Psi = \Phi$．ゆえに，N_A は閉である． □

注意 続編『量子物理の数理』で証明するフォン ノイマンの定理を応用すれば，実は，N_A は非負の自己共役演算子であることがわかる．だが，ここでは，補題 3.57 の性質がわかっていれば十分である．

演算子 N_A の固有値問題について，次の結果が得られる．

定理 3.58 単位ベクトル $\Omega \in \mathsf{D}$ で

$$A\Omega = 0 \tag{3.167}$$

をみたすものが存在すると仮定しよう．このとき，次の (i), (ii) が成立する：

(i) 任意の非負の整数は N_A の固有値である：

$$\mathbb{Z}_+ \subset \sigma_{\mathrm{p}}(N_A). \tag{3.168}$$

N_A の固有値 $n \in \mathbb{Z}_+$ に属する規格化された固有ベクトルのひとつは

$$\Psi_n := \frac{1}{\sqrt{n!}}(A^*)^n\Omega \tag{3.169}$$

によってあたえられる．

(ii) 上の仮定に加えて，$\{\Psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ が H の CONS であるとする．このとき，N_A は自己共役であり，D 上で本質的に自己共役である．さらに，N_A の各固有値 n の多重度は 1 で，

$$\sigma(N_A) = \sigma_{\rm p}(N_A) = \mathbb{Z}_+ \tag{3.170}$$

が成立する．また，任意の $\Psi \in \mathsf{D}(N_A)$ に対して，

$$N_A\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} n\langle\Psi_n, \Psi\rangle\Psi_n \tag{3.171}$$

という展開式が成り立つ．さらに，$\mathbb{Z}_+$ 上で有限な値をとる，$\mathbb{R}$ 上の任意のボレル可測関数 f に対して，

$$\mathsf{D}(f(N_A)) = \{\Psi \in \mathsf{H} | \sum_{n=0}^{\infty} |f(n)|\,|\langle\Psi_n, \Psi\rangle|^2 < \infty\}, \tag{3.172a}$$

$$f(N_A)\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\langle\Psi_n, \Psi\rangle\Psi_n, \quad \Psi \in \mathsf{D}(f(N_A)), \tag{3.172b}$$

が成立する．

証明 (i) 交換関係 (3.164) を用いると，任意の $\Psi \in \mathsf{D}$ に対して

$$\begin{aligned} A(A^*)^n\Psi &= (1 + A^*A)(A^*)^{n-1}\Psi \\ &= (A^*)^{n-1}\Psi + A^*[A(A^*)^{n-1}\Psi] \\ &= 2(A^*)^{n-1}\Psi + (A^*)^2[A(A^*)^{n-2}\Psi] \\ &= \cdots\cdots \\ &= n(A^*)^{n-1}\Psi + (A^*)^nA\Psi. \end{aligned}$$

すなわち，

$$[A, (A^*)^n] = n(A^*)^{n-1} \quad (\mathsf{D}\text{ 上で}) \tag{3.173}$$

という交換関係が成り立つ．これと仮定の条件 (3.167) を用いると $N_A\Psi_n = n\Psi_n$ が得られる．そこで，$\|\Psi_n\| = 1$ を示せば，題意がしたがう．各 n に対して，

$$\|\Psi_n\|^2 = \frac{1}{n!}\langle(A^*)^{n-1}\Omega, A(A^*)^n\Omega\rangle$$

であるが，(3.173) を使えば，右辺は $\|\Psi_{n-1}\|^2$ に等しいことがわかる．したがって

$$\|\Psi_n\| = \|\Psi_{n-1}\| = \cdots = \|\Psi_0\| = \|\Omega\| = 1.$$

(ii) $\{\Psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ が H の CONS としよう．仮に，N_A の固有値 n の多重度が $k \geq 2$ とすれば，$\Phi_n \perp \Psi_n, N_A\Phi_n = n\Phi_n, \Phi_n \neq 0$, をみたすベクトル $\Phi_n \in \mathsf{D}(N_A)$ が存在する．しかし，N_A は対称演算子であるから，$\langle \Phi_n, \Psi_m \rangle = 0, m \neq n$. したがって，$\Phi_n \in [\mathcal{L}(\{\Psi_n\}_{n=0}^{\infty})]^{\perp}$. これは，$\Phi_n = 0$ を意味するので矛盾である．ゆえに，いまの仮定のもとでは，各固有値 n の多重度は 1 である．

$N_A \upharpoonright \mathsf{D}$ の本質的自己共役性は命題 2.79 を応用すれば証明される．また，同命題と N_A の閉性により，$N_A = \overline{N_A \upharpoonright \mathsf{D}}$ であるから，N_A は自己共役である．(3.171) は (2.168) を応用すれば得られる．

次に，$\lambda \notin \{n\}_{n=0}^{\infty}$ ならば，$\lambda \in \varrho(N_A)$ を示そう（このとき，(3.170) の証明が完結する）．任意の $\Phi \in \mathsf{H}$ に対して，$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty}(n-\lambda)^{-1}\langle \Psi_n, \Phi\rangle \Psi_n$ は収束する ($\because \sum_{n=0}^{\infty} |(n-\lambda)^{-1}|^2 |\langle \Psi_n, \Phi \rangle|^2 \leq (\inf_{n\geq 0}|n-\lambda|)^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} |\langle \Psi_n, \Phi\rangle|^2 < \infty$). そこで，$\eta_N = \sum_{n=0}^{N}(n-\lambda)^{-1}\langle \Psi_n, \Phi \rangle \Psi_n$ とおくと，$\eta_N \in \mathsf{D} \subset \mathsf{D}(N_A), \eta_N \to \Psi \ (N \to \infty)$ であり，

$$\begin{aligned} N_A \eta_N &= \sum_{n=0}^{N} n(n-\lambda)^{-1}\langle \Psi_n, \Phi\rangle \Psi_n = \sum_{n=0}^{N} \langle \Psi_n, \Phi \rangle \Psi_n + \lambda \eta_N \\ &\to \Phi + \lambda \Psi \quad (N \to \infty). \end{aligned}$$

したがって，$\Psi \in \mathsf{D}(N_A)$ かつ $(N_A - \lambda)\Psi = \Phi$. ゆえに，$N_A - \lambda$ は全射である．(3.172) によって，$\Psi \in \ker(N_A - \lambda)$ ならば，$\sum_{n=0}^{\infty}(n-\lambda)\langle \Psi_n, \Psi \rangle \Psi_n = 0$. したがって，$\langle \Psi_n, \Psi \rangle = 0, n \geq 0$. ゆえに，$\Psi = 0$. よって，$N_A - \lambda$ は単射である．以上から，$\lambda \in \varrho(N_A)$.

(3.172a), (3.172b) は例 2.25 の応用による．　□

次の事実に注目しよう：

補題 3.59

$$\overline{H_{\rm os} \upharpoonright \mathsf{D}} \subset H_{\rm os}$$

が成り立つ．

証明 任意の $\Psi \in \mathsf{D}$ に対して，

$$\|H_{\rm os}\Psi\|^2 = \frac{1}{(2m)^2}\left\{\|P^2\Psi\|^2 + \|(m\omega Q)^2\Psi\|^2 + 2(m\omega)^2{\rm Re}\langle P^2\Psi, Q^2\Psi\rangle\right\}. \tag{3.174}$$

CCR を使うと，

$$\begin{aligned}\langle P^2\Psi, Q^2\Psi\rangle &= \langle P\Psi, PQQ\Psi\rangle \\ &= -i\hbar\langle P\Psi, Q\Psi\rangle + \langle P\Psi, QPQ\Psi\rangle \\ &= -2i\hbar\langle P\Psi, Q\Psi\rangle + \langle P\Psi, Q^2P\Psi\rangle.\end{aligned}$$

したがって，$Q^2 \geq 0$ に注意して，

$${\rm Re}\langle P^2\Psi, Q^2\Psi\rangle \geq -i\hbar\langle\Psi, [P, Q]\Psi\rangle = -\hbar^2\|\Psi\|^2.$$

これと (3.174) によって，

$$\frac{1}{(2m)^2}\left(\|P^2\Psi\|^2 + \|(m\omega Q)^2\Psi\|^2\right) \leq \|H_{\rm os}\Psi\|^2 + \frac{(\hbar\omega)^2}{2}\|\Psi\|^2. \tag{3.175}$$

を得る．$\Psi \in \mathsf{D}(\overline{H_{\rm os}\restriction\mathsf{D}})$ とすれば，$\Psi_n \to \Psi$, $H_{\rm os}\Psi_n \to \overline{H_{\rm os}\restriction\mathsf{D}}\Psi\ (n\to\infty)$ となる $\Psi_n \in \mathsf{D}$ が存在する．このとき，(3.175) により，$\{P^2\Psi_n\}_n, \{Q^2\Psi_n\}_n$ はコーシー列である．したがって，$P^2\Psi_n \to \Phi_1, Q^2\Psi_n \to \Phi_2\ (n\to\infty)$ となる $\Phi_j \in \mathsf{H}, j=1,2,$ が存在する．一般に，対称演算子 B と任意の $\eta \in \mathsf{D}(B^2)$ に対して，シュヴァルツの不等式によって，$\|B\eta\|^2 \leq \|\eta\|\,\|B^2\eta\|$ が成り立つことに注意すれば，$\{P\Psi_n\}_n, \{Q\Psi_n\}_n$ もコーシー列であることがわかる．これと P, Q の閉性により，$\Psi \in \mathsf{D}(P)\cap\mathsf{D}(Q)$ かつ $P\Psi_n \to P\Psi, Q\Psi_n \to Q\Psi\ (n\to\infty)$ が得られる．したがって，また，$P\Psi \in \mathsf{D}(P), Q\Psi \in \mathsf{D}(Q)$ かつ $\Phi_1 = P^2\Psi, \Phi_2 = Q^2\Psi$ がしたがう．ゆえに，$\Psi \in \mathsf{D}(P^2)\cap\mathsf{D}(Q^2) = \mathsf{D}(H_{\rm os}), H_{\rm os}\Psi_n \to H_{\rm os}\Psi\ (n\to\infty)$．こうして，$\mathsf{D}(\overline{H_{\rm os}\restriction\mathsf{D}}) \subset \mathsf{D}(H_{\rm os})$，$\overline{H_{\rm os}\restriction\mathsf{D}} \subset H_{\rm os}$ が得られる． □

定理 3.58 は $H_{\rm os}$ の性質に翻訳される：

定理 3.60　定理 3.58 と同じ仮定のもとで，次の (i), (ii) が成り立つ．

(i)　各 $n = 0, 1, 2, \cdots$，に対して，

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \tag{3.176}$$

とおく．このとき，

$$\{E_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \sigma_{\mathrm{p}}(H_{\mathrm{os}}). \tag{3.177}$$

(3.169) によって定義されるベクトル Ψ_n は H_{os} の固有値 E_n に属する規格化された固有ベクトルのひとつである．

(ii)　はじめの仮定に加えて，$\{\Psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ が H の CONS であるとする．このとき，H_{os} は自己共役かつ D 上で本質的に自己共役であり，演算子の等式

$$H_{\mathrm{os}} = \hbar\omega\left(N_A + \frac{1}{2}\right) \tag{3.178}$$

が成立する．さらに，H_{os} の各固有値 E_n の多重度は 1 で，

$$\sigma(H_{\mathrm{os}}) = \sigma_{\mathrm{p}}(H_{\mathrm{os}}) = \{E_n\}_{n=0}^{\infty} \tag{3.179}$$

が成立する．また，任意の $\Psi \in \mathsf{D}(H_{\mathrm{os}})$ に対して，

$$H_{\mathrm{os}}\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \langle \Psi_n, \Psi\rangle \Psi_n \tag{3.180}$$

という展開式が成り立つ．さらに，$\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$ 上で有限な値をとる，$\mathbb{R}$ 上の任意のボレル可測関数 f に対して，

$$\mathsf{D}(f(H_{\mathrm{os}})) = \{\Psi \in \mathsf{H} | \sum_{n=0}^{\infty} |f(E_n)\langle \Psi_n, \Psi\rangle|^2 < \infty\}, \tag{3.181a}$$

$$f(H_{\mathrm{os}})\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} f(E_n)\langle \Psi_n, \Psi\rangle \Psi_n, \quad \Psi \in \mathsf{D}(f(H_{\mathrm{os}})), \tag{3.181b}$$

が成立する．特に，すべての $t \in \mathbb{R}$ と $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$e^{-itH_{\mathrm{os}}/\hbar}\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-itE_n/\hbar}\langle \Psi_n, \Psi\rangle \Psi_n. \tag{3.182}$$

証明　(i) これは (3.165) から容易にしたがう.

(ii) (3.165) と $N_A \restriction \mathsf{D}$ の本質的自己共役性は，H_{os} の D 上での本質的自己共役性を意味し，演算子の等式

$$\overline{H_{\mathrm{os}} \restriction \mathsf{D}} = \hbar\omega \left(N_A + \frac{1}{2} \right)$$

が成り立つ．したがって，補題 3.59 と自己共役演算子は非自明な拡大をもたないという事実によって，$H_{\mathrm{os}} = \overline{H_{\mathrm{os}} \restriction \mathsf{D}}$ でなければならない．したがって，(3.178) が成立する．その他の主張は定理 3.58 の対応する部分から容易に翻訳される．(3.181a), (3.181b) で $f(\lambda) = e^{-it\lambda/\hbar}$ の場合を考えれば，(3.182) が得られる． □

式 (3.182) は，定理 3.58 の仮定と $\{\Psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ が H の CONS であるという仮定のもとでの，系の状態の時間発展に対するひとつの表示である．

定理 3.58 の仮定や N_A の固有ベクトルの完全性は CCR の表現に依存しうる．そこで，次にシュレーディンガー表現の場合に，これらの条件が実際にみたされることを示そう．したがって，この場合には，調和振動子のスペクトル問題は完全に解けることになる．

3.8.2　シュレーディンガー表現の場合

CCR の表現 $\{\mathsf{H}, \mathsf{D}, \{Q, P\}\}$ が自由度 1 の CCR のシュレーディンガー表現 $\{L^2(\mathbb{R}), \mathcal{S}(\mathbb{R}), \{\hat{x}, \hat{p}\}\}$ （$\hat{x}$ は変数 $x \in \mathbb{R}$ をかけるかけ算演算子，$\hat{p} := -i\hbar D_x$）である場合には，1 次元調和振動子のハミルトニアン H_{os} は

$$H_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}} := -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x + \frac{K}{2}\hat{x}^2 \tag{3.183}$$

という形をとる．ただし，Δ_x は変数 x に関する一般化されたラプラシアンである．この場合に (3.162) によって定義される演算子 A を a と記すことにする：

$$\begin{aligned} a :&= i\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(\hat{p} - im\omega\hat{x}) \restriction \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(D_x + \frac{m\omega}{\hbar}\hat{x}\right) \restriction \mathcal{S}(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{3.184}$$

定理 3.58 を応用するためには，

$$a\Omega_0 = 0 \tag{3.185}$$

をみたす関数 $\Omega_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ を求めなければならない．そのためには，$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上では D_x は普通の意味での微分演算子であるから，(3.184) により，微分方程式

$$\frac{d}{dx}\Omega_0(x) + \frac{m\omega}{\hbar}x\Omega_0(x) = 0$$

の解 Ω_0 で条件 $\Omega_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ をみたすものを求めればよい．この微分方程式は簡単に解くことができ，その解は，定数倍を除いて，

$$\Omega_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar} \tag{3.186}$$

であたえられる．これは，$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の元なので，まさにわれわれの求める関数である．さらに，公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

を使えば，$\|\Omega_0\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R})} = 1$ もわかる．つまり，Ω_0 は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ の単位ベクトルである．こうして，

$$\mathsf{H} = \mathsf{L}^2(\mathbb{R}),\ \mathsf{D} = \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ Q = \hat{x},\ P = \hat{p},\ \Omega = \Omega_0$$

として，定理 3.58 の基本仮定がみたされるので，$H_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}$ は固有値 E_n をもち，

$$\Omega_n := \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^*)^n\Omega_0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{3.187}$$

によって定義される Ω_n は，それに属する規格化された固有ベクトル（固有関数）のひとつである．

CCR のシュレーディンガー表現における調和振動子のハミルトニアン $H_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}$ の固有関数系 $\{\Omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ が $\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ の CONS であるかどうかを調べるために，Ω_n に対するもっと陽な表式を求めてみよう．a の共役演算子 a^* は

$$\begin{aligned} a^* \restriction \mathcal{S}(\mathbb{R}) &= -i\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(\hat{p} + im\omega\hat{x}) \restriction \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(-D_x + \frac{m\omega}{\hbar}\hat{x}\right) \restriction \mathcal{S}(\mathbb{R}) \end{aligned} \tag{3.188}$$

という形をもつから，

$$\Omega_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^n\left(-\frac{d}{dx}+\frac{m\omega}{\hbar}x\right)^n\Omega_0(x)$$

と書ける．一方，任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ と実数 t に対して，関数の等式として

$$e^{tx^2/2}\left(-\frac{d}{dx}\right)(e^{-tx^2/2}f) = \left(-\frac{d}{dx}+tx\right)f$$

が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned}\Omega_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^n e^{m\omega x^2/2\hbar}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n e^{-m\omega x^2/2\hbar}\Omega_0(x)\\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}}\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4}\left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^n e^{-m\omega x^2/2\hbar}\\ &\quad \times e^{m\omega x^2/\hbar}\frac{d^n}{dx^n}e^{-m\omega x^2/\hbar}\end{aligned} \tag{3.189}$$

を得る．この形は特殊関数論におけるエルミート (Hermite) 多項式

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{3.190}$$

を想起させる（1 章演習問題 8 を参照）．実際，これを使えば，

$$\Omega_n(x) = \frac{\sqrt{\nu}}{\pi^{1/4}2^{n/2}\sqrt{n!}}H_n(\nu x)e^{-(\nu x)^2/2} \tag{3.191}$$

と表わされる．ただし，

$$\nu = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}. \tag{3.192}$$

ところで，エルミート多項式系 $\{H_n(x)\}_{n=0}^\infty$ は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$ で完全な直交系をなす（章末演習問題 8）[*35]．これは，$\{H_n(x)e^{-x^2/2}\}_{n=0}^\infty$ が $\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ で完全な直交系をなすのと同値である．ゆえに，$\{\Omega_n\}_{n=0}^\infty$ は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ の CONS であることが結論される（章末演習問題 9 を参照）．したがって，いまの場合，定理 3.58(ii) の仮定もみたされる．こうして，次の事実が証明されたことになる：

[*35] 1 章演習問題 8(iv) も参照．また，新井朝雄『ヒルベルト空間と量子力学』（共立出版）の 7 章練習問題 4，H. ホックシタット『特殊関数』（岡崎　誠・大槻義彦 共訳，培風館）の 2 章，§6 を参照．

定理 3.61　CCR のシュレーディンガー表現における調和振動子のハミルトニアン $H_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}$ は自己共役であり，$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上で本質的に自己共役である．また，演算子の等式

$$H_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}} = \hbar\omega\left(\bar{a}^*\bar{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{3.193}$$

が成立する．$H_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}$ のスペクトルの下端をあたえる $1/2\hbar\omega$ を**零点エネルギー**（zero–point energy）という．さらに，

$$\sigma(H_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}) = \sigma_{\mathrm{p}}(H_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}) = \{E_n\}_{n=0}^{\infty}, \tag{3.194}$$

$H_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}$ の各固有値 E_n の多重度は 1 であり，それに属する規格化された固有関数は（絶対値 1 の定数倍を除いて）Ω_n であたえられる．$\{\Omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ の CONS であり，任意の $\psi \in \mathsf{D}(H_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}})$ に対して，

$$H_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}\psi = \sum_{n=0}^{\infty} E_n\langle\Omega_n, \psi\rangle\Omega_n \tag{3.195}$$

が成立する．$\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$ 上で有限な値をとる，$\mathbb{R}$ 上の任意のボレル可測関数 f に対して，

$$\mathsf{D}(f(H_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}})) = \{\psi \in \mathsf{H} | \sum_{n=0}^{\infty} |f(E_n)\langle\Omega_n, \psi\rangle|^2 < \infty\}, \tag{3.196a}$$

$$f(H_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}})\psi = \sum_{n=0}^{\infty} f(E_n)\langle\Omega_n, \psi\rangle\Omega_n, \quad \psi \in \mathsf{D}(f(H_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}})). \tag{3.196b}$$

特に，すべての $t \in \mathbb{R}$ と $\psi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ に対して，

$$e^{-itH_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}/\hbar}\psi = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-itE_n/\hbar}\langle\Omega_n, \psi\rangle\Omega_n. \tag{3.197}$$

定理 3.61 によって，自己共役演算子

$$N_a := \bar{a}^*\bar{a} \tag{3.198}$$

のスペクトルは非負の整数全体 $\mathbb{Z}_+$ である．このゆえに，N_a を $\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ 上の**個数演算子** (number operator) とよぶ．

定理 3.61 は次のことを示す．すなわち，CCR のシュレーディンガー表現における 1 次元量子調和振動子の系は，エネルギースペクトルに関しては，対応する古典力学系とは全く異なる性質をもつ，ということである．古典的な 1 次元調和振動子の系では，そのハミルトニアン

$$H_{\mathrm{os}}^{\mathrm{cl}}(x,p) := \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

（x, $p \in \mathbb{R}$ はそれぞれ，振動子の座標変数と運動量変数を表わす）は，0 から無限大にいたるあらゆる値をとりうる関数である．だが，定理 3.61 によれば，量子系ではそのようにはならず，量子系のハミルトニアン $H_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}$ の最低エネルギーは $E_0 = \hbar\omega/2$ という厳密に正の値をとり，しかも，ハミルトニアンのスペクトルのとりうる値は離散的である．

ハミルトニアン $H_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}$ の固有値 E_n は，

$$E_n = n\hbar\omega + E_0$$

と書くことができる．この式は状況によっては次のように解釈される：$\hbar\omega$ があるひとつの "量子" のエネルギーを表わし，Ω_0 は，正のエネルギー $\hbar\omega/2$ をもつ状態であるが，量子が全く存在しない状態，すなわち，"真空 (vacuum)" であり，Ω_n は n 個の量子が存在する状態とみなされるのである．この見方では，E_0 を**真空のエネルギー**という．こうして，調和振動子の正準量子化は，エネルギーがとびとびの値をとる，というプランクの量子仮説を理論的に説明するひとつのモデルを提供する．この意味で，調和振動子は，量子力学的なモデルのひとつの典型をあたえる．

調和振動子の系に関する上述の結果はさらに深い側面をもっている．$H_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}$ の固有値 E_n に属する固有空間を H_n としよう：

$$\mathsf{H}_n = \{\alpha\Omega_n | \alpha \in \mathbb{C}\}. \tag{3.199}$$

すでに述べたように $\{\Omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ の CONS であるので，

$$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathsf{H}_n \tag{3.200}$$

となる．この直交分解は，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ の任意の元をエルミート関数系で展開することに対応しているので，**エルミート分解**とよばれる．H_n は N_a の固有空間でもあり，その対応する固有値は n である．さらに，

$$\Omega_n = \frac{1}{\sqrt{n}} a^* \Omega_{n-1} \tag{3.201}$$

が成り立つことに注意すれば，a^* $[= (\bar{a})^*]$ は H_{n-1} から H_n への線形写像とみなすことができる．したがって，たったいま上に述べた物理的解釈にしたがうならば，a^* は量子をひとつ増やす働きをする演算子とみることができる．この意味で a^* を**生成演算子** (creation operator) という．また，$\bar{a}$ は H_n を H_{n-1}（$\mathsf{H}_{-1} := \{0\}$ とする）にうつすので，量子をひとつ減らす働きをする．そこで，$\bar{a}$ を**消滅演算子** (annihilation operator) という．こうして，調和振動子のモデルは，素粒子の生成消滅の基本的なモデルのひとつを提供する．この特性は，連続体上の古典力学系の量子化，すなわち，古典場の量子化としての場の量子論にとってひとつの出発点をあたえてくれることにもなる．

定理 3.61 の (3.197) は，CCR のシュレーディンガー表現における調和振動子の系の時間発展に関してやや具体的な表示をあたえる．この式から重要な結果を引き出すことができる．実際，$e^{-i\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)E_n/\hbar} = -e^{-itE_n/\hbar}$ に注意すれば，

$$e^{-i\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)H_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}/\hbar} = -e^{-itH_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}/\hbar} \tag{3.202}$$

が成立することがわかる．つまり，系の時間発展演算子 $e^{-itH_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}/\hbar}$ は時間 t について，反周期 $2\pi/\omega$ の反周期性をもつ[*36]．ところで，$2\pi/\omega$ は対応する古典系での調和振動の基本周期である（次の注意を参照）．こうして，古典系の運動の周期性は，量子系にあっては状態の時間発展の反周期性として遺伝することがわかる．

注意　古典的な 1 次元調和振動子のハミルトンの正準方程式は，$\partial H_{\mathrm{os}}^{\mathrm{cl}}(x,p)/\partial p = p/m, \partial H_{\mathrm{os}}^{\mathrm{cl}}(x,p)/\partial x = m\omega^2 x$ によって，

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{p(t)}{m}, \quad \frac{dp(t)}{dt} = -m\omega^2 x(t),$$

---

*36 一般に，$\mathbb{R}$ 上の関数または演算子値関数 $F(t)$ について，定数 $T > 0$ があって，$F(t+T) = -F(t)$, $t \in \mathbb{R}$ が成り立つとき，F は**反周期的** (anti-periodic) であるといい，そのような T のうちで最小のものをその反周期という．

である．時刻 0 での古典系の状態を (x_0, p_0) $(x(0) = x_0,\ p(0) = p_0)$ とすれば，この方程式の解は

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos \omega t + p_0 \frac{\sin \omega t}{m\omega}, \\ p(t) &= -x_0 m\omega \sin \omega t + p_0 \cos \omega t, \end{aligned}$$

であたえられる．したがって，古典系は周期 $2\pi/\omega$ の周期運動を行なう．

3.8.3 時間発展演算子の積分表示，メーラーの公式

3.6 節で見たように，自由粒子の時間発展演算子は積分核を用いて表示することができた（定理 3.42）．CCR のシュレーディンガー表現における量子調和振動子の系の時間発展演算子 $e^{-itH_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}/\hbar}$ もその種の表示ができることを示そう．そのための鍵となるのは (3.197) 式である．ここでは，より一般の場合の表式を得るために，“複素時間”$z \in \mathbb{C}$ に対する時間発展演算子 $e^{-izH_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}/\hbar}$ について考察する[*37]．そのために次の事実に注意する．

補題 3.62 H をヒルベルト空間，A を H 上の自己共役演算子で下に有界であるとする．このとき，すべての $s > 0$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して，$e^{-(s+it)A}$ は有界演算子であり，

$$\|e^{-(s+it)A}\| = e^{-sE_0(A)} = \|e^{-sA}\| \tag{3.203}$$

が成り立つ．ここで，$E_0(A)$ は A のスペクトルの下限である（(3.123) で $H = A$ としたもの）．さらに，

$$\operatorname{s-}\lim_{s \to 0} e^{-(s+it)A} = e^{-itA}. \tag{3.204}$$

証明 A のスペクトル測度を E_A とすれば，$\mathrm{supp}\, E_A = \sigma(A) \subset [E_0(A), \infty)$．したがって，$\mathbb{R}$ 上の関数:$\lambda \to e^{-(s+it)\lambda}$ は $\sigma(A)$ 上で有界である．ゆえに，定理 2.84(iv) によって，演算子 $e^{-(s+it)A}$ は有界であり，$\|e^{-(s+it)A}\| \le e^{-sE_0(A)}$ が

[*37] ここで言及した “複素時間”は時間パラメーターを単に複素数に拡張して考えるという意味であり，さしあたり数学的なものである．その物理的な意味についてはいまは問わないことにする．

成り立つ．この逆の不等式を示そう．$E_0(A) \in \sigma(A)$ であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$E_A([E_0(A), E_0(A)+\varepsilon))\Psi_\varepsilon \neq 0$ をみたすベクトル $\Psi_\varepsilon \in \mathsf{H}$ が存在する．そこで，$\Phi_\varepsilon := E_A([E_0(A), E_0(A)+\varepsilon))\Psi_\varepsilon / \|E_A([E_0(A), E_0(A)+\varepsilon))\Psi_\varepsilon\|$ とおけば，$\|\Phi_\varepsilon\| = 1$ であり，

$$\begin{aligned}\|e^{-(s+it)A}\Phi_\varepsilon\|^2 &= \int_{[E_0(A), E_0(A)+\varepsilon)} e^{-2s\lambda} d\|E_A(\lambda)\Phi_\varepsilon\|^2 \\ &\geq e^{-2s(E_0(A)+\varepsilon)} \int_{[E_0(A), E_0(A)+\varepsilon)} d\|E_A(\lambda)\Phi_\varepsilon\|^2 \\ &= e^{-2s(E_0(A)+\varepsilon)}.\end{aligned}$$

左辺は $\|e^{-(s+it)A}\|^2$ でおさえられるから，$e^{-s(E_0(A)+\varepsilon)} \leq \|e^{-(s+it)A}\|$ を得る．そこで，$\varepsilon \to 0$ とすれば，$e^{-sE_0(A)} \leq \|e^{-(s+it)A}\|$．以上により，(3.203) の第 1 の等式が得られる．スペクトル写像定理により，

$$\sigma(e^{-sA}) = \overline{\{e^{-s\lambda} | \lambda \in \sigma(A)\}}$$

したがって，e^{-sA} のスペクトル半径（2 章演習問題 8 を参照）は $e^{-sE_0(A)}$ に等しい．一方，e^{-sA} は自己共役であるから，そのスペクトル半径は $\|e^{-sA}\|$ に等しい（2 章演習問題 8(ii)）．ゆえに，(3.203) の第 2 の等式が得られる．

演算子解析により，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して

$$\begin{aligned}\|e^{-(s+it)A}\Psi - e^{-itA}\Psi\|^2 &= \int_{E_0(A)}^{\infty} |e^{-(s+it)\lambda} - e^{-it\lambda}|^2 d\|E_A(\lambda)\Psi\|^2 \\ &= \int_{E_0(A)}^{\infty} |e^{-s\lambda} - 1|^2 d\|E_A(\lambda)\Psi\|^2. \quad (3.205)\end{aligned}$$

$0 < s < 1$, $\lambda \geq E_0(A)$ ならば，

$$|e^{-s\lambda} - 1| \leq e^{-sE_0(A)} + 1 \leq \max\{1, e^{-E_0(A)}\} + 1.$$

したがって，ルベーグの優収束定理が応用でき，(3.205) で $s \to 0$ の極限と積分が交換できるので $\|e^{-(s+it)A}\Psi - e^{-itA}\Psi\|^2 \to 0$ $(s \to 0)$ が得られる． □

さて，補題 3.62 を $s + it = iz$，$A = H_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}/\hbar$ の場合に応用すれば次の事実が得られる．

命題 3.63 $\mathrm{Im}\, z < 0$ とする．このとき，$e^{-izH_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}/\hbar}$ は有界演算子であり，

$$\|e^{-izH_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}/\hbar}\| = e^{\omega \mathrm{Im}\, z/2} = \|e^{H_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}} \mathrm{Im}\, z/\hbar}\| \tag{3.206}$$

が成り立つ．さらに，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\text{s-}\lim_{s \downarrow 0} e^{-(s+it)H_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}/\hbar} = e^{-itH_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}/\hbar}. \tag{3.207}$$

注意 $\mathrm{Im}\, z > 0$ ならば，$e^{-izH_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}/\hbar}$ は非有界である．

定理 3.61 の (3.196b) 式により，すべての $\psi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ に対して，

$$e^{-izH_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}/\hbar}\psi = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-izE_n/\hbar}\langle \Omega_n, \psi\rangle \Omega_n. \tag{3.208}$$

この式の右辺を変形することにより，$e^{-izH_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}/\hbar}\psi$ に対する積分核表示を得ることができる．実際，次の定理が成り立つ：

定理 3.64 $\mathrm{Im}\, z < 0$ とする．このとき，すべての $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\left(e^{-izH_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}/\hbar}\psi\right)(x) \\
&= \frac{\nu}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\omega iz/2}}{\sqrt{1-e^{-2\omega iz}}} \\
&\times \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1+e^{-2\omega iz}}{2(1-e^{-2\omega iz})}\nu^2(x^2+y^2) + \frac{2e^{-\omega iz}}{1-e^{-2\omega iz}}\nu^2 xy\right)\psi(y)dy, \\
&\quad \text{a.e.}\, x.
\end{aligned} \tag{3.209}$$

ただし，複素数 α に対して，$\sqrt{\alpha}$ は $\mathrm{Re}\sqrt{\alpha} > 0$ となる枝を選ぶ．

注意 $\mathrm{Im}\, z < 0$ であるから，$|e^{-2\omega iz}| = e^{2\omega \mathrm{Im}\, z} < 1$．したがって，

$$\mathrm{Re}\, \frac{1+e^{-2\omega iz}}{2(1-e^{-2\omega iz})} > 0. \tag{3.210}$$

ゆえに，(3.209) の右辺の積分は，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して存在する．

証明　$\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ を任意に固定する．(3.208) は L^2 収束であるが，付録 A の定理 A.16 を応用すれば，自然数列 $\{N_j\}_{j=1}^{\infty}$ で

$$\left(e^{-izH_{\rm os}^{\rm S}/\hbar}\psi\right)(x) = \lim_{j\to\infty}\sum_{n=0}^{N_j} e^{-izE_n/\hbar}\langle\Omega_n,\psi\rangle\Omega_n(x), \quad \text{a.e.}\, x,$$

をみたすものがとれる．(3.176) と (3.191) を使うと

$$\begin{aligned}&\left(e^{-izH_{\rm os}^{\rm S}/\hbar}\psi\right)(x)\\ &= \frac{\nu}{\sqrt{\pi}}e^{-\omega iz/2}\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}} K_{N_j}(x,y)e^{-\nu^2(x^2+y^2)/2}\psi(y)dy, \quad \text{a.e.}\, x,\end{aligned} \tag{3.211}$$

と書ける．ただし，

$$K_N(x,y) = \sum_{n=0}^{N} e^{-n\omega iz}\frac{H_n(\nu y)H_n(\nu x)}{2^n n!}.$$

これを変形するために，$|w|<1$ をみたす，すべての複素数 w に対して成立する関係式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!}w^n = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}\exp\left(-\frac{w^2}{1-w^2}(x^2+y^2)+\frac{2w}{1-w^2}xy\right) \tag{3.212}$$

に注目する*38．

一般に，$|w|<1$ で正則な関数 f に対して，コーシーの評価式

$$|f^{(n)}(0)| \le \frac{n!}{r^n}\sup_{|w|=r}|f(w)|$$

が成り立つ．ただし，r は $0<r<1$ をみたす任意の定数である．したがって，

*38 たとえば，H. ホックシタット『特殊関数』(岡崎　誠・大槻義彦 共訳，培風館) の 2 章，問題 5 を参照．ただし，この著書では，n 次のエルミート多項式は $(-1)^n e^{x^2/2}(d/dx)^n e^{-x^2/2}$ として定義されていることに注意．本書の記号では，$2^{-n/2}H_n(x/\sqrt{2})$ である．

$|w| < r$ のとき，

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} w^n\right| \le \sum_{n=0}^{N} \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}|w|^n$$
$$\le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|w|^n}{r^n} \sup_{|w|=r} |f(w)|$$
$$= \left(1 - \frac{|w|}{r}\right)^{-1} \sup_{|w|=r} |f(w)|.$$

関数 $f(w)$ として，(3.212) の右辺の関数を考えると，

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!} w^n\right| e^{-(x^2+y^2)/2}$$
$$\le \left(1 - \frac{|w|}{r}\right)^{-1} \sup_{|w|=r} \left|\frac{1}{\sqrt{1-w^2}} \exp\left(-\frac{1+w^2}{2(1-w^2)}(x^2+y^2) + \frac{2w}{1-w^2}xy\right)\right|$$

簡単な計算により，$|w| = r < 1$ をみたす任意の $w \in \mathbb{C}$ に対して，

$$|\sqrt{1-w^2}\,| \ge \sqrt{1-r^2}, \quad \mathrm{Re}\,\frac{1+w^2}{2(1-w^2)} \ge \frac{1+r^2}{2(1-r^2)} > 0.$$

したがって，$|w| < r$ をみたす，すべての $w \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!} w^n\right| e^{-(x^2+y^2)/2} \le c_0 e^{-c_1(x^2+y^2)+c_2|x|\,|y|}$$

が得られる．ただし，$c_0 := (1-|w|/r)^{-1}(1-r^2)^{-1/2}$，$c_1 := (1+r^2)/[2(1-r^2)]$，$c_2 := 2r/(1-r^2)$．この不等式を $w = e^{-\omega iz}$ の場合に応用すれば，$e^{\omega \mathrm{Im} z} < r < 1$ のとき，

$$|K_N(x,y)|e^{-\nu(x^2+y^2)/2}|\psi(y)| \le c_0 e^{-c_1\nu^2(x^2+y^2)+c_2\nu^2|x|\,|y|}|\psi(y)|.$$

右辺は，N によらない (y についての) 可積分関数である．したがって，ルベーグの優収束定理が応用できるので，(3.211) で積分と極限の交換ができる．これと (3.212) を使えば，(3.209) が得られる．　□

定理 3.64 と (3.207) から，通常の実時間 $t \in \mathbb{R}$ に関する時間発展演算子 $e^{-itH_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}/\hbar}$ に対する公式が導かれる：

定理 3.65

(i) すべての $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\left(e^{-itH_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}/\hbar}\psi\right)(x) \\
&= \mathrm{l.i.m.}_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\nu}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\omega it/2}}{\sqrt{1-e^{-2\omega it}}} \\
&\times \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1+e^{-2\omega\varepsilon}e^{-2it\omega}}{2(1-e^{-2\omega\varepsilon}e^{-2it\omega})}\nu^2(x^2+y^2) + \frac{2e^{-\omega\varepsilon}e^{-it\omega}}{1-e^{-2\omega\varepsilon}e^{-2it\omega}}\nu^2 xy\right) \\
&\times \psi(y)dy. \qquad (3.213)
\end{aligned}$$

ここで，$\mathrm{l.i.m}_{\varepsilon\downarrow 0}$ は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ での収束（平均 2 乗収束）を表わす．

(ii) $t \notin \pi\mathbb{Z}/\omega := \{\pi n/\omega | n \in \mathbb{Z}\}$ とする．このとき，

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi(y)| \exp\left(\frac{e^{2\omega}\nu^2|xy|}{2(\sin\omega t)^2}\right) dy < \infty, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad (3.214)$$

をみたす，すべての $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\left(e^{-itH_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}/\hbar}\psi\right)(x) \\
&= \frac{\nu}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\omega it/2}}{\sqrt{1-e^{-2\omega it}}} \\
&\times \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{i}{2}\frac{\cos\omega t}{\sin\omega t}\nu^2(x^2+y^2) - \frac{i}{\sin\omega t}\nu^2 xy\right)\psi(y)dy, \\
&\qquad \text{a.e. } x. \qquad (3.215)
\end{aligned}$$

注意 (ii) の t に対する仮定は，(3.215) の右辺に現われる定数や被積分関数が意味をもつために必要である．

証明 (i) これは，(3.207) と定理 3.64 による[*39]．

(ii) (i) の結果と付録 A の定理 A.16 によって，単調減少の正数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$

---

*39 一般に，ヒルベルト空間 H 上の有界演算子の族 $\{T(t)\}_{t\in[a,b]}$ と $f(t) \neq 0, t \in [a,b]$ をみたす $[a,b]$ 上の連続関数 f について，$\mathrm{s\text{-}lim}_{t\to t_0} f(t)T(t) = S \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$ ならば，$\mathrm{s\text{-}lim}_{t\to t_0} T(t)$ は存在し，$S = f(t_0)\mathrm{s\text{-}lim}_{t\to t_0} T(t)$ が成り立つ（証明は容易）．(3.209) から (3.213) を得るのにこの事実も使っていることに注意．

で，$0 < s_n < 1$，$s_n \downarrow 0\,(n \to \infty)$ および

$$\begin{aligned}&\left(e^{-itH_{\rm os}^{\rm S}/\hbar}\psi\right)(x)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\nu}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\omega it/2}}{\sqrt{1-e^{-2\omega it}}}\\&\times\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{1+e^{-2\omega s_n}e^{-2it\omega}}{2(1-e^{-2\omega s_n}e^{-2it\omega})}\nu^2(x^2+y^2)+\frac{2e^{-\omega s_n}e^{-it\omega}}{1-e^{-\omega s_n}e^{-2it\omega}}\nu^2xy\right)\\&\times\psi(y)dy,\quad \text{a.e.}\,x,\end{aligned}\tag{3.216}$$

をみたすものがとれる．右辺で，積分と極限が交換できることを示せば (3.215) が得られる．そのために，(3.216) の右辺の積分の被積分関数の絶対値を評価する．簡単のため，$A = \nu^2(x^2+y^2)/2$，$B = 2\nu^2xy$，

$$F_n := \frac{1+e^{-2\omega s_n}e^{-2it\omega}}{2(1-e^{-2\omega s_n}e^{-2it\omega})}\nu^2(x^2+y^2) - \frac{2e^{-\omega s_n}e^{-it\omega}}{1-e^{-2\omega s_n}e^{-2it\omega}}\nu^2xy$$

とおくと，

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}F_n &= \frac{(1-e^{-4\omega s_n})A + e^{-\omega s_n}(1-e^{-2\omega s_n})(\cos\omega t)B}{(1-e^{-2\omega s_n})^2+4e^{-2\omega s_n}(\sin\omega t)^2}\\&\geq -\frac{e^{2\omega}|B|}{4(\sin\omega t)^2}.\end{aligned}$$

したがって，

$$|e^{-F_n}\psi(y)| = e^{-\operatorname{Re}F_n}|\psi(y)| \leq |\psi(y)|\exp\left(\frac{e^{2\omega}\nu^2|xy|}{2(\sin\omega t)^2}\right).$$

この不等式の右辺—n によらない—は，仮定 (3.214) によって，$\mathbb{R}$ 上で可積分である．容易にわかるように，

$$\lim_{n\to\infty}e^{-F_n} = \exp\left(-\frac{1+e^{-2it\omega}}{2(1-e^{-2it\omega})}\nu^2(x^2+y^2)+\frac{2e^{-it\omega}}{1-e^{-2it\omega}}\nu^2xy\right).$$

したがって，ルベーグの優収束定理により，(3.216) の右辺で，積分と極限が交換でき，(3.215) を得る． □

定理 3.64 から得られる，もうひとつの特別な場合として，純虚数時間 $z = -it$ $(t > 0)$ に対する公式を書いておこう．すなわち，すべての $t > 0$ と $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

に対して

$$\left(e^{-tH_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}/\hbar}\psi\right)(x)$$
$$= \frac{\nu}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{\sinh\omega t}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{\cosh\omega t}{2\sinh\omega t}\nu^2(x^2+y^2)+\frac{1}{\sinh\omega t}\nu^2 xy\right)\psi(y)dy,$$
$$\text{a.e.}\, x. \tag{3.217}$$

が成立する．これは**メーラー** (Mehler) **の公式**とよばれる．

3.8.4　ハイゼンベルクの運動方程式の解

ここでは，再び，3.8.1 項の一般の CCR の表現 $\{\mathsf{H},\mathsf{D},\{Q,P\}\}$ における調和振動子の系を扱う．この項を通して，次の仮定 (H) をおく：

仮定 (H)　定理 3.58 の大前提 [(3.167) をみたす単位ベクトル $\Omega\in\mathsf{D}$ の存在] および定理 3.58(ii) の仮定（正規直交系 $\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty$ の完全性）が成立する．

このとき，定理 3.60 によって，H_{os} は自己共役であるので，Q, P に対するハイゼンベルク演算子

$$Q(t) := e^{itH_{\mathrm{os}}/\hbar}Qe^{-itH_{\mathrm{os}}/\hbar},\quad P(t) := e^{itH_{\mathrm{os}}/\hbar}Pe^{-itH_{\mathrm{os}}/\hbar}, \tag{3.218}$$

が定義される．ベクトル Ψ_n, $n\in\mathbb{Z}_+$ によって生成される部分空間を D_0 としよう：

$$\mathsf{D}_0 := \mathcal{L}\left(\{\Psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}\right). \tag{3.219}$$

仮定 (H) によって，D_0 は H で稠密であり，

$$\mathsf{D}_0\subset\mathsf{D}.$$

補題 3.66　すべての $t\in\mathbb{R}$ に対して，$Q(t)$, $P(t)$ は D_0 を不変にし，任意の $\Psi\in\mathsf{D}_0$ に対して，

$$\frac{1}{2m}\langle\Psi,P(t)^2\Psi\rangle+\frac{m\omega^2}{2}\langle\Psi,Q(t)^2\Psi\rangle=\langle\Psi,H_{\mathrm{os}}\Psi\rangle \tag{3.220}$$

が成り立つ．

証明 (3.162), (3.163) を Q, P について解くと D 上で

$$Q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(A^* + A), \tag{3.221}$$

$$P = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(A^* - A), \tag{3.222}$$

が成立する．演算子 A^* が D_0 を不変にすることは明らか．また，(3.164) を使えば，A が D_0 を不変にすることもわかる．したがって，(3.221), (3.222) によって，Q, P は D_0 を不変にする．また，演算子 $e^{\pm itH_{\mathrm{os}}/\hbar}$ が D_0 を不変にすることも容易にわかる ($\because$ $\Psi = \sum_{n=0}^{N} a_n\Psi_n \in \mathsf{D}_0$ ($a_n \in \mathbb{C}$) ならば，任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して，$e^{isH_{\mathrm{os}}}\Psi = \sum_{n=0}^{N} a_n e^{isE_n}\Psi_n \in \mathsf{D}_0$)．ゆえに，$Q(t)$, $P(t)$ は D_0 を不変にする．(3.161) を $e^{itH_{\mathrm{os}}/\hbar}$ と $e^{-itH_{\mathrm{os}}/\hbar}$ ではさみ，いま示した事実と

$$e^{itH_{\mathrm{os}}/\hbar}H_{\mathrm{os}}e^{-itH_{\mathrm{os}}/\hbar} = H_{\mathrm{os}}$$

を使えば，D_0 上で

$$H_{\mathrm{os}} = \frac{1}{2m}P(t)^2 + \frac{m\omega^2}{2}Q(t)^2 \tag{3.223}$$

が成り立つことがわかる．これから，(3.220) が得られる． □

(3.220) から，

$$0 \le \langle\Psi, Q(t)^2\Psi\rangle \le \frac{2}{m\omega^2}\langle\Psi, H_{\mathrm{os}}\Psi\rangle, \tag{3.224}$$

$$0 \le \langle\Psi, P(t)^2\Psi\rangle \le 2m\langle\Psi, H_{\mathrm{os}}\Psi\rangle, \tag{3.225}$$

という不等式が得られる．これは，物理量 $Q(t)^2$, $P(t)^2$ の期待値が時間 t について一様に有界であることを示し，自由粒子の場合とは対照的である．ここに示唆されている物理的内容をもう少し詳しく見るために，ハイゼンベルク演算子 $Q(t)$, $P(t)$ のあらわな表示を求めよう．実際，次の定理が成り立つ：

定理 3.67 すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して，$Q(t)$, $P(t)$ は D_0 を不変にし，D_0 上で

$$Q(t) = Q\cos\omega t + P\frac{\sin\omega t}{m\omega}, \tag{3.226}$$

$$P(t) = -Qm\omega\sin\omega t + P\cos\omega t, \tag{3.227}$$

が成立する．

証明　補題 3.66 と (3.221), (3.222) により，D_0 上で

$$Q(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(A(t)^* + A(t)), \tag{3.228}$$

$$P(t) = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(A(t)^* - A(t)), \tag{3.229}$$

が成り立つ．ただし，

$$A(t) := e^{itH_{\mathrm{os}}/\hbar}Ae^{-itH_{\mathrm{os}}/\hbar}. \tag{3.230}$$

さて，$A \in \mathfrak{A}_{H_{\mathrm{os}}}$ を示そう（定義 3.54）．実際，$\mathsf{D}_A = \mathsf{D}_0$ とすれば，すべての $s \in \mathbb{R}$ に対して，$e^{isH_{\mathrm{os}}}\mathsf{D}_A \subset \mathsf{D}_A \subset \mathsf{D}(A) \cap \mathsf{D}(A^*)$．したがって，定義 3.54(i) の条件はみたされる．いまの場合，$\mathsf{D}_{A,H_{\mathrm{os}}} = \mathsf{D}_A$ である．ハミルトニアン H_{os} も D_0 を不変にするから，任意の $\Psi, \Phi \in \mathsf{D}_A$ に対して，

$$\langle H_{\mathrm{os}}\Psi, A\Phi\rangle - \langle A^*\Psi, H_{\mathrm{os}}\Phi\rangle = \langle \Psi, [H_{\mathrm{os}}, A]\Phi\rangle.$$

他方，(3.164) と (3.165) を用いると

$$[H_{\mathrm{os}}, A] = -\hbar\omega A \quad (\mathsf{D}_0 \text{ 上}) \tag{3.231}$$

がわかる．したがって，D_A 上で弱交換子 $[H_{\mathrm{os}}, A]_{\mathrm{w}}$ は存在し，

$$[H_{\mathrm{os}}, A]_{\mathrm{w}} = -\hbar\omega A \quad (\mathsf{D}_0 \text{ 上}).$$

ゆえに，定義 3.54(ii) の条件がみたされる．さらに，任意の $\Psi = \sum_{n=0}^N a_n\Psi_n \in \mathsf{D}_A$ ($a_n \in \mathbb{C}$) に対して，$Ae^{isH_{\mathrm{os}}}\Psi = \sum_{n=0}^N a_n e^{isE_n}A\Psi_n$ であるから，H-値関数：$s \to Ae^{isH_{\mathrm{os}}}\Psi$ は強連続である．同様に，H-値関数：$s \to A^*e^{isH_{\mathrm{os}}}\Psi$ も強連続である．したがって，定義 3.54(iii) の条件がみたされる．以上から，$A \in \mathfrak{A}_{H_{\mathrm{os}}}$ が示されたことになる．ゆえに，定理 3.55 が応用できるので，すべての $\Psi, \Phi \in \mathsf{D}_A = \mathsf{D}_0$ に対して，

$$\frac{d}{dt}\langle\Psi, A(t)\Phi\rangle = -i\omega\langle\Psi, A(t)\Phi\rangle$$

が成り立つ [(3.154) も使った]．この方程式は簡単に解けて，

$$\langle\Psi, A(t)\Phi\rangle = e^{-i\omega t}\langle\Psi, A\Phi\rangle.$$

よって，

$$A(t) = e^{-i\omega t}A \quad (\mathsf{D}_0 \text{ 上}). \tag{3.232}$$

これは，

$$A(t)^* = e^{i\omega t}A^* \quad (\mathsf{D}_0 \text{ 上}) \tag{3.233}$$

を導く．これらの式を (3.228), (3.229) に代入すれば，D_0 上で，

$$Q(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(A^* e^{i\omega t} + A e^{-i\omega t}\right), \tag{3.234}$$

$$P(t) = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(A^* e^{i\omega t} - A e^{-i\omega t}\right), \tag{3.235}$$

が成立することがわかる．そこで，右辺に (3.162), (3.163) を代入して整理すれば，(3.226), (3.227) が得られる． □

定理 3.67 から引き出される結果を考察しよう．まず，ハイゼンベルク演算子 $Q(t)$, $P(t)$ の形は，対応する古典力学系の時間発展 $(x(t), p(t))$ (3.8.2 項の末尾の注意を参照) と同じであり，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$Q\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = Q(t), \quad P\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = P(t) \quad (\mathsf{D}_0\text{上}) \tag{3.236}$$

が成り立つという意味で，物理量 Q, P の時間発展は周期的であること (周期は $2\pi/\omega$) がわかる．また，任意の $\Psi \in \mathsf{D}_0$ に対して，二つの H-値関数：$t \to Q(t)\Psi$, $t \to P(t)\Psi$ は周期 $2\pi/\omega$ の強連続関数である．したがって，特に，

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\langle\Psi, Q(t)^2\Psi\rangle = \max_{t\in[0,2\pi/\omega]}\|Q(t)\Psi\|^2 < \infty, \tag{3.237}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\langle\Psi, P(t)^2\Psi\rangle = \max_{t\in[0,2\pi/\omega]}\|P(t)\Psi\|^2 < \infty, \tag{3.238}$$

が成り立つ．これらは，(3.224), (3.225) をより精密にした不等式と見ることができる．実際，(3.237), (3.238) それぞれの右辺は，(3.226), (3.227) を使えば，もっと具体的に評価することが可能であるが，その詳細を埋めることは読者に委ねる．

3.8.5　ボルン-ハイゼンベルク-ヨルダン表現の場合

例 3.4 で，ボルン-ハイゼンベルク-ヨルダン表現とよばれる CCR の表現を導入した．この表現の場合，調和振動子はどのようになるかを調べよう．例 3.4 で $d=1$ の場合，すなわち，$\{l^2(\mathbb{Z}_+), l_0^2(\mathbb{Z}_+), \{Q_1^{\mathrm{H}}, P_1^{\mathrm{H}}\}\}$ を考えればよい．以下，Q_1^{H}, P_1^{H} をそれぞれ，単に Q_{H}, P_{H} と記す．したがって，この表現でのハミルトニアンを H'_{os} とすれば，

$$H'_{\mathrm{os}} = \frac{1}{2m}(P_{\mathrm{H}}^2 + m^2\omega^2 Q_{\mathrm{H}}^2) \tag{3.239}$$

である．また，いまの場合において，(3.162) によって定義される演算子 A を A_{H} と書くことにする：

$$A_{\mathrm{H}} := \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(P_{\mathrm{H}} - im\omega Q_{\mathrm{H}}) \restriction l_0(\mathbb{Z}_+). \tag{3.240}$$

したがって，(3.165) によって，

$$H'_{\mathrm{os}} = \hbar\omega A_{\mathrm{H}}^* A_{\mathrm{H}} + \frac{\hbar\omega}{2} \quad (l_0^2(\mathbb{Z}_+)\ \text{上}). \tag{3.241}$$

例 3.4 のボルン-ハイゼンベルク-ヨルダン表現はパラメーター $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ を含むが，いま，

$$c = \sqrt{m\omega} \tag{3.242}$$

と選ぶ．このとき，任意の $\psi \in l_0^2(\mathbb{Z}_+)$ に対して，

$$(A_{\mathrm{H}}\psi)(n) = \sqrt{n+1}\,\psi(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.243}$$

となることがわかる．したがって，

$$(A_{\mathrm{H}}^*\psi)(n) = \begin{cases} \sqrt{n}\,\psi(n-1)\ ; & n \geq 1, \\ 0\ ; & n = 0. \end{cases} \tag{3.244}$$

これと (3.243) によって，

$$(A_{\mathrm{H}}^* A_{\mathrm{H}}\psi)(n) = n\psi(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.245}$$

したがって，(3.241) により，

$$(H'_{\mathrm{os}}\psi)(n) = E_n\psi(n), \quad \psi \in l_0^2(\mathbb{Z}_+),\ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.246}$$

ここで，E_n は (3.176) であたえられる実数である．これから，わかるように，ボルン-ハイゼンベルク-ヨルダン表現では，ハミルトニアン H'_{os} の作用は極めて単純である．特に，$\psi_n \in l_0^2(\mathbb{Z}_+)$ を

$$\psi_n(n') = \delta_{nn'}, \quad n' \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.247}$$

によって定義すれば，

$$H'_{\mathrm{os}}\psi_n = E_n\psi_n \tag{3.248}$$

が成り立つので，E_n は H'_{os} の固有値であり，ψ_n は E_n に属する，規格化された固有ベクトルである．第 1 章の例 1.19 と同様にして，$\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $l^2(\mathbb{Z}_+)$ の CONS であることがわかる．また，容易にわかるように，

$$A_{\mathrm{H}}\psi_0 = 0, \tag{3.249}$$

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(A_{\mathrm{H}}^*)^n\psi_0, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.250}$$

したがって，定理 3.60 が応用でき，H'_{os} は自己共役であり，定理 3.60(ii) の結論が $H_{\mathrm{os}} = H'_{\mathrm{os}}$ として成立する．こうして，CCR のボルン-ハイゼンベルク-ヨルダン表現を用いた場合には，調和振動子の解析は極めて簡単な形になることがわかる．こうなることの要因は，(3.248) からわかるように，ハミルトニアン H'_{os} の固有値問題がほとんど自動的に解けてしまうことによる．

演算子 A_{H}，A_{H}^* はそれぞれ，$l^2(\mathbb{Z}_+)$ における**消滅演算子**，**生成演算子**とよばれる．

系の時間発展も，(3.182) と (3.247) から，任意の $\psi \in l^2(\mathbb{Z}_+)$ に対して

$$(e^{-itH'_{\mathrm{os}}/\hbar}\psi)(n) = e^{-itE_n/\hbar}\psi(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.251}$$

という，いたって単純な公式であたえられる．

3.8.6 シュレーディンガー表現とボルン-ハイゼンベルク-ヨルダン表現の同等性

3.8.2 項，3.8.4 項，3.8.5 項の結果から，調和振動子のハミルトニアンのスペクトルや状態の時間発展の反周期性あるいは物理量 Q, P の時間発展の形は，シュレーディンガー表現を用いた場合とボルン-ハイゼンベルク-ヨルダン表現を用いた場合で同じであることがわかる．だが，なぜ，そうなるのであろうか．実は，次の定理に述べる事実が背後にあるのである．

定理 3.68 $\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ から $l^2(\mathbb{Z}_+)$ へのユニタリ変換 U で

$$U\hat{x}U^{-1} = Q_{\mathrm{H}}, \quad U\hat{p}U^{-1} = P_{\mathrm{H}} \quad (\text{演算子の等式}) \tag{3.252}$$

をみたすものがただひとつ存在する．

証明 第 1 章の定理 1.39 によって，

$$U\Omega_n = \psi_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.253}$$

をみたすユニタリ変換 $U : \mathsf{L}^2(\mathbb{R}) \to l^2(\mathbb{Z}_+)$ がただひとつ存在する．この U が (3.252) をみたすことを示そう．(3.253) から，$l_0^2(\mathbb{Z}_+)$ 上で

$$UaU^{-1} = A_{\mathrm{H}}$$

が成り立つことがわかる．したがって，

$$U\hat{x}U^{-1} = Q_{\mathrm{H}},\ U\hat{p}U^{-1} = P_{\mathrm{H}}, \quad (l_0^2(\mathbb{Z}_+)\ \text{上}).$$

例 3.4 で示したように，Q_{H} は $l_0^2(\mathbb{Z}_+)$ 上で本質的に自己共役である．したがって，$\hat{x}$ は $U^{-1}l_0^2(\mathbb{Z}_+) = \mathsf{D}_0$ 上で本質的に自己共役であり，(3.252) の第 1 式が得られる（章末演習問題 10 を参照）．第 2 式についても同様． □

定理 3.68 は，1 自由度の CCR のシュレーディンガー表現とボルン-ハイゼンベルク-ヨルダン表現がユニタリ同値であることを示す．したがって，本書で展開するヒルベルト空間形式の量子力学においては，これらの表現によって展

開される量子力学の理論は物理的に同じ結果をもたらす（これは調和振動子に限らず，もっと一般の（1 自由度の）量子系にあてはまる）．この意味で，定理 3.68 は，シュレーディンガーの波動力学とボルン-ハイゼンベルク-ヨルダンの行列力学の同等性を示す．こうして，上述の疑問に明確な答があたえられる．

調和振動子の場合，定理 3.68 から，演算子の等式

$$UH_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}U^{-1} = H_{\mathrm{os}}' \tag{3.254}$$

が成立することになる．したがって，たとえば，$H_{\mathrm{os}}^{\mathrm{S}}$ のスペクトル特性と H_{os}' のそれは同じになる．

注意　定理 3.68 は，任意の有限自由度の CCR ののシュレーディンガー表現とボルン-ハイゼンベルク-ヨルダン表現に対して拡張される．

第 3 章　演習問題

以下の問題における H, K はヒルベルト空間を表わす.

1. $f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}), f \neq 0$, を任意に固定し，$t \in \mathbb{R}$ に対して，$\psi_t \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ を次のように定義する：

$$\psi_t(x) = \begin{cases} e^{ix/t} f(x); & t \neq 0 \text{ のとき} \\ 0; & t = 0 \text{ のとき} \end{cases}.$$

このとき，対応 $t \to \psi_t$ は，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$-値関数として，$t = 0$ で弱連続であるが，強連続ではないことを示せ.

ヒント：リーマン-ルベーグの補題（付録 B，定理 B.11 を参照）を用いよ.

2. ψ_t を前問のものとするとき，$\phi_t := t\psi_t$ は $t = 0$ で弱微分可能であるが強微分可能でないことを示せ.

3. H の点列 $\{\Psi_n\}_n$ に対して，すべての $\Phi \in \mathsf{H}$ において，$\lim_{n\to\infty}\langle \Phi, \Psi_n \rangle$ が存在するとする.

(i)　$\{\Psi_n\}_n$ は有界であることを示せ.

ヒント：有界線形汎関数 $F_n(\Phi) = \langle \Psi_n, \Phi \rangle$ の族 $\{F_n\}_n$ にバナッハ-シュタインハウスの定理を応用せよ.

(ii)　$\text{w-}\lim_{n\to\infty} \Psi_n$ は存在することを示せ.

ヒント：線形汎関数 $\Phi \to F(\Phi) = \lim_{n\to\infty}\langle \Psi_n, \Phi \rangle$ にリースの表現定理を応用せよ.

4. $\{\Psi_n\}_n$ を H の点列で弱収束するものとする．すなわち，$\text{w-}\lim_{n\to\infty} \Psi_n = \Psi \in \mathsf{H}$ が存在するとする．このとき，次の (i)～(iii) を証明せよ.

(i)　$\{\Psi_n\}_n$ は有界である.

注意．この事実は，**弱収束する点列は有界である**ということである.

(ii)　$\|\Psi\| \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\|\Psi_n\| \leq \overline{\lim}_{n\to\infty}\|\Psi_n\| < \infty$.

(iii)　Ψ は $\{\Psi_n\}_n$ が生成する閉部分空間 $\overline{\mathcal{L}(\{\Psi_n\}_n)}$ に属する.

5. A_n，B_n，A，$B \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$，$\text{s-}\lim_{n\to\infty} A_n = A$，$\text{s-}\lim_{n\to\infty} B_n = B$ とする．このとき，次の (i), (ii) を証明せよ.

(i)　任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して，$\text{s-}\lim_{n\to\infty}(\alpha A_n + \beta B_n) = \alpha A + \beta B$.

(ii)　$\text{s-}\lim_{n\to\infty} A_n B_n = AB$.

6. A_n，$A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$，$A_n \geq 0$，$A \geq 0$ とする．このとき，次の (i), (iii) を証明せよ.

(i)　$\text{u-}\lim_{n\to\infty} A_n = A$ ならば，$\text{u-}\lim_{n\to\infty} \sqrt{A_n} = \sqrt{A}$.

ヒント：$\|A_n\| \le 1$ として，一般性を失わないことに注意．このとき，$\|A\| \le 1$．$B \in \mathfrak{B}(\mathsf{H}), B \ge 0, \|B\| \le 1$ の場合の，$\sqrt{B}$ に対する級数展開を使え．

(ii) $\text{s-}\lim_{n\to\infty} A_n = A$ ならば $\text{s-}\lim_{n\to\infty} \sqrt{A_n} = \sqrt{A}$.

7. $A_n, A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$ とする．このとき，次の (i)〜(iii) を証明せよ．

(i) $\text{u-}\lim_{n\to\infty} A_n = A$ ならば，$\text{u-}\lim_{n\to\infty} |A_n| = |A|$.

ヒント：$\text{u-}\lim_{n\to\infty} A_n^* A_n = A^* A$ を示し，前問 (i) を応用せよ．

(ii) $\text{s-}\lim_{n\to\infty} A_n = A, \text{s-}\lim_{n\to\infty} A_n^* = A^*$ ならば，$\text{s-}\lim_{n\to\infty} |A_n| = |A|$.

ヒント：前問 (ii) を応用せよ．

(iii) $\text{w-}\lim_{n\to\infty} A_n = A$ でも $|A_n|$ は $|A|$ に弱収束するとは限らない．

ヒント：そのような例をひとつつくればよい．たとえば，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ 上で，$(A_n f)(x) = e^{inx} f(x), f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ によって定義される演算子 A_n を考えると，リーマン-ルベーグの補題（付録 B を参照）によって，$\text{w-}\lim_{n\to\infty} A_n = 0$．一方，$A_n$ はユニタリであるから，$|A_n| = I$．

8. $H_n(x)$ をエルミート多項式とし [(3.190) 式]，$\phi_n(x) = c_n H_n(x) e^{-x^2/2}, c_n = \pi^{-1/4}(2^n n!)^{-1/2}$, とおく．関数系 $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ が $\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ の正規直交系であることは第 1 章演習問題 8 においてすでに示した．この関数系が完全であることを次の手順で証明せよ．

(i) すべての $z \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$e^{-z^2+2zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n$$

を示せ．さらに，任意の $r > 0$ に対して，$|H_n(x)| \le n! e^{r^2+2r|x|}/r^n$ が成り立つことを示せ

ヒント：e^{-z^2+2zx} は z の整関数であることを利用せよ．

注意． 2 変数関数 e^{-z^2+2zx} をエルミート多項式系 $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ の**母関数** (generating function) という．

(ii) すべての $n \ge 0$ に対して，$\langle \phi_n, f \rangle_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R})} = 0$　$(f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}))$ ならば，すべての実数 a に対して，$\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-a)^2/2} f(x) dx = 0$ であることを示せ．

(iii) すべての実数 a に対して，$\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-a)^2/2} f(x) dx = 0$ $(f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}))$ ならば，$f = 0$ を示せ．

ヒント：フーリエ変換．

(iv) 以上から，$\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ が $\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ の CONS であることを結論せよ．

9. 各 $t > 0$ に対して，写像 $u_t : \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d) \to \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ を

$$(u_t f)(x) = t^{d/2} f(tx)$$

によって定義する.

(i)　u_t はユニタリ演算子であることを証明せよ.

(ii)　任意の $s, t > 0$ に対して, $u_{st} = u_s u_t = u_t u_s$ を証明せよ.

(iii)　(i) を利用して, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ の CONS ならば, 任意の $t > 0$ に対して, $\{t^{d/2} f_n(tx)\}_{n=1}^{\infty}$ も $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ の CONS であることを証明せよ.

注意. ユニタリ演算子 u_t は**スケール変換**あるいは**伸張変換** (dilation) とよばれる.

10. $U : \mathsf{H} \to \mathsf{K}$ はユニタリ, $\mathsf{D} \subset \mathsf{K}$ は稠密,

$$USU^{-1} = T \quad (\mathsf{D}\ 上),$$

T は D 上で本質的に自己共役であるとする. このとき, S は $U^{-1}\mathsf{D}$ 上で本質的に自己共役であり, 演算子の等式

$$U\bar{S}U^{-1} = \bar{T}$$

が成り立つ. これを証明せよ.

11. $\{\hat{x}, \hat{p}\}$ を 1 自由度の CCR のシュレーディンガー表現とする: $\hat{x} = x$ (かけ算作用素), $\hat{p} = -i\hbar D_x$ (D_x は変数 x についての一般化された微分作用素), 作用するヒルベルト空間は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$. $a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ を定数として, 関数

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4}\sqrt{\sigma}} e^{-\frac{(x-a)^2}{4\sigma^2}}$$

によって表わされる状態を考える (容易にわかるように, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \|\psi\| = 1$). このとき, 次の (i), (ii) を証明せよ.

(i)　$\langle \psi, \hat{x}\psi \rangle = a$, $\langle \psi, \hat{p}\psi \rangle = 0$.

(ii)　$(\Delta\hat{x})_\psi = \sigma, (\Delta\hat{p})_\psi = \frac{\hbar}{2\sigma}$. したがって, $(\Delta\hat{x})_\psi(\Delta\hat{p})_\psi = \frac{\hbar}{2}$ が成立する.

注意. 一般に, 不確定性関係によって, $(\Delta\hat{x})_\phi(\Delta\hat{p})_\phi \geq \frac{\hbar}{2}$, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|\phi\| = 1$. したがって, この問題の状態 ψ は $\hat{x}$ の不確定さと $\hat{p}$ の不確定さの積を最小にする状態である. だが, σ を小さくすればするほど位置の不確定さは小さくなるが, 運動量の不確定さは大きくなることに注意しよう. いまの場合の位置の確率密度関数は

$$|\psi(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right).$$

この型の関数は**ガウス** (Gauss) **型**とよばれる. これから決まる確率分布を**ガウス** (Gauss) **分布**あるいは**正規分布**という. 確率論的には, a は平均, σ は標準偏差とよばれる. この分布は, σ が小さくなればなるほど, $x = a$ のまわりに集中して

くる．超関数の収束の意味で，$|\psi(x)|^2 \to \delta(x-a)(\sigma \to 0)$ （付録 C，命題 C.5 を参照）．

なお，この ψ は，$a=0$, $\sigma = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}$ ならば，3.8 節で論じた，シュレーディンガー表現における調和振動子のハミルトニアンの基底状態 Ω_0 に等しい．

12. A を H 上の自己共役演算子とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$(\Delta A)_{\Psi_\varepsilon} \le \varepsilon$ となる単位ベクトル $\Psi_\varepsilon \in \mathsf{D}(A)$ が存在することを示せ

ヒント：スペクトル定理を応用せよ．

注意. この事実は，量子力学の文脈では，物理量 A が固有ベクトルをもたない場合であっても，$\mathsf{D}(A)$ のすべての単位ベクトルが状態ベクトルを表わすものとすれば，A を単独で考える限り，あたえられた任意の精度 ε に対して，A の不確定さがそれ以下になる状態がつねに存在することを示す．

13. H 上の自己共役作用素 Q, P が部分空間 $\mathsf{D} \subset \mathsf{D}(QP) \cap \mathsf{D}(PQ)$ の上で CCR をみたすならば，Q, P は D の中に固有ベクトルをもたないことを示せ．

14. $L_1, L_2, L_3, \mathsf{D}$ を 3.4.4 項のものとする（L_j は角運動量演算子）．L_3 が固有値 λ をもち，その規格化された固有ベクトル Ψ は D に属するとしよう：$L_3\Psi = \lambda\Psi$ $(\|\Psi\| = 1)$．このとき，次の (i), (ii) を証明せよ．

(i) 状態 Ψ における L_1, L_2 の期待値は 0 である．

(ii) 不等式 $(\Delta L_1)_\Psi (\Delta L_2)_\Psi \ge \frac{\hbar|\lambda|}{2}$ が成立する．

ヒント：D 上で成立する交換関係 $[L_1, L_2] = i\hbar L_3, [L_2, L_3] = i\hbar L_1$, $[L_3, L_1] = i\hbar L_2$ を用いよ．

15. $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ において，各 $t \in \mathbb{R}$ と $j = 1, \cdots, d$ に対して，演算子 $U_j(t)$ を

$$(U_j(t)\psi)(x) = \psi(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \cdots, x_d),\ \psi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d),$$

によって定義する．

(i) $U_j(t)U_k(s) = U_k(s)U_j(t), s, t \in \mathbb{R}, j, k = 1, \cdots, d$ を示せ．

(ii) $\{U_j(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ は強連続 1 パラメーターユニタリ群であることを証明せよ．

ヒント：等長性はルベーグ測度の並進不変性による．強連続性については，まず，$\psi \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ の場合に対して証明する．次に，$\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ が稠密であることを用いて，極限移行の議論をせよ．

(iii) $U_j(t)$ の生成子は，CCR のシュレーディンガー表現の運動量演算子 $P_j^S = -i\hbar D_{x_j}$ の $1/\hbar$ 倍であること，すなわち，$U_j(t) = e^{itP_j^S/\hbar}$ を示せ．

ヒント：$\psi \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して，$U_j(t)\psi$ の $t=0$ での強微分を計算し，$\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は P_j^S の芯であることを用いよ．

16. 自由粒子の状態の時間発展の公式 (3.131) は $\psi \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対しても成立することを示せ．

17. d 次元の自由粒子の系において，時刻 $t=0$ での状態が

$$\psi_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/4}\sigma^{d/2}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}$$

によってあたえられるとき ($\sigma > 0$)，t 秒後の状態 $\psi_t = e^{-itH_0/\hbar}\psi_0$ を求めよ．$|\psi_t(x)|^2$ によって表わされる波束の幅は t に関してどのように変化するか．

18. $\{\mathsf{H}, \mathsf{D}, \{Q, P\}\}$ を 1 自由度の CCR の表現とし，Q, P は D を不変にするとする．H_{os} を (3.161) によってあたえられる調和振動子のハミルトニアンとする．$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を (3.75) によって定義されるパウリ行列とする．ヒルベルト空間

$$\mathsf{H} \bigoplus \mathsf{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix} \,\middle|\, \Psi,\ \Phi \in \mathsf{H} \right\}$$

上の演算子 D_{os} を

$$D_{\mathrm{os}} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\sigma_1 P + \sqrt{\frac{m}{2}}\omega\sigma_2 Q$$

によって定義する．ただし，行列 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，

$$M \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a\Psi + b\Phi \\ c\Psi + d\Phi \end{pmatrix}.$$

また，H 上の演算子 A を $\mathsf{H} \bigoplus \mathsf{H}$ 上の演算子と見るときは，その定義域は，$\mathsf{D}(A) \bigoplus \mathsf{D}(A$ であり，作用は

$$A \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A\Psi \\ A\Phi \end{pmatrix}, \quad \Psi,\ \Phi \in \mathsf{D}(A),$$

とする．このとき，$\mathsf{D} \bigoplus \mathsf{D}$ 上で $H_{\mathrm{os}} + \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_3 = D_{\mathrm{os}}^2$ が成立することを示せ．

注意．これは，1 次元調和振動子のハミルトニアンをディラック型の演算子によって "因数分解" する問題である．D_{os} を**調和振動子に相伴うディラック演算子**という．CCR のシュレーディンガー表現をとるならば，D_{os} は，行列を係数とする 1 階の微分演算子である．多自由度の場合への一般化は容易である（遂行せよ）．

19. 1 次元の区間 $[-L/2, L/2]$ の中を 1 個の量子力学的粒子が運動するような系を考える ($L > 0$)．状態のヒルベルト空間を $\mathsf{L}^2([-L/2, L/2])$ に選ぶ．α を $|\alpha| = 1$ をみたす任意の複素数とし，ヒルベルト空間 $\mathsf{L}^2([-L/2, L/2])$ 上の演算子 $p(\alpha)$ を

$$\mathsf{D}(p(\alpha)) := \left\{ f \in \mathrm{AC}^2[-L/2, L/2] \middle| \ f(-L/2) = \alpha f(L/2) \right\},$$
$$p(\alpha)f := -i\hbar f', \quad f \in \mathsf{D}(p(\alpha)),$$

によって定義する．このとき，第 2 章 2.3.8 項の演算子 A_α の場合と同様にして，$p(\alpha)$ は自己共役であることがわかる．演算子 $\hat{x}_L$ を関数 x による（ヒルベルト空間 $\mathsf{L}^2([-L/2, L/2])$ 上の）かけ算演算子とする．

(i) $\hat{x}_L$ は有界な自己共役演算子であり，$\|\hat{x}_L\| = L/2$ を示せ．

(ii) $\pi(\alpha) := \{\mathsf{L}^2([-L/2, L/2]), \mathsf{C}_0^1(-L/2, L/2), \{\hat{x}_L, p(\alpha)\}\}$ は 1 自由度の CCR の表現であることを示せ．

(iii) ハミルトニアン

$$H_0(\alpha) := \frac{1}{2m}p(\alpha)^2$$

のスペクトルを求め，それは固有値のみからなることを示せ．また，$\alpha \neq \beta$ のとき ($|\beta| = 1$) $H_0(\alpha)$ と $H_0(\beta)$ のスペクトルは異なることを示せ．

(iv) $\alpha \neq \beta$ ならば，CCR の二つの表現 $\pi(\alpha)$ と $\pi(\beta)$ はユニタリ同値でないことを示せ．

注意．演算子 $p(\alpha)$ と $p(\beta)$ の違いは，要するに，$x = L/2$, $-L/2$ における境界条件の違いであり，これが (iv) の事実を導く．他方，境界条件の違いは，系の物理的状況の違いとして理解される．こうして，いまの場合のユニタリ同値でない CCR の表現は，それぞれ，異なる物理的状況を記述していることがわかる．通常，周期的境界条件，すなわち，$\alpha = 1$ の場合が，無限系（量子力学的粒子が $\mathbb{R}$ 全体を運動する場合）に対する有限体積版として採用される．

20. 電荷 $e \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，質量 $m > 0$ の粒子が直線 $\mathbb{R}$ 上を電場 $E > 0$ の作用もとで運動する量子系を考える（電場の向きは x 軸の正方向とする）．この系の古典的ハミルトニアンは $H^{\mathrm{cl}}(x, p) := p^2/(2m) + \mu x$, $\mu := -Ee \neq 0$, であたえられる．したがって，CCR のシュレーディンガー表現 $\{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}), \mathcal{S}(\mathbb{R}), \{\hat{x}, \hat{p}\}\}$ を用いた場合の量子系のハミルトニアンは

$$H := \frac{\hat{p}^2}{2m} + \mu\hat{x} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \mu\hat{x}$$

である．

(i) H は上にも下にも有界でないことを示せ．

　ヒント：$f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ で $\|f\| = 1$ となるものを任意に固定し，$f_{n,\pm}(x) = f(x \mp n)$ とおく．このとき，$f_{n,\pm} \in \mathsf{D}(H)$, $\|f_{n,\pm}\| = 1$ であり，$\langle f_{n,\pm}, Hf_{n,\pm}\rangle \varepsilon(\mu) \to \pm\infty$ $(n \to \infty)$ を示せ．

(ii) 任意の $\psi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ に対して，

$$(U\psi)(\lambda) \\ := \mathrm{l.i.m.}_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|\le R} \hat{\psi}(k) \exp\left\{i\left(\lambda k - \frac{\hbar^2 k^3}{6m\mu}\right)\right\} dk, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

を定義する．ここで，$\hat{\psi}$ は ψ のフーリエ変換を表わす．このとき，U はユニタリであることを示せ．

ヒント：フーリエ変換のユニタリ性．

(iii) U は $\mathcal{S}(\mathbb{R}_x)$ から $\mathcal{S}(\mathbb{R}_\lambda)$ への全単射であることを示せ．

ヒント：フーリエ変換は $\mathcal{S}(\mathbb{R}_x)$ から $\mathcal{S}(\mathbb{R}_k)$ への全単射である．

(iv) 任意の $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_\lambda)$ に対して

$$UHU^{-1}\psi = \mu\lambda\psi$$

が成り立つことを示せ．

(v) $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}_\lambda)$ 上のかけ算演算子 λ が $\mathcal{S}(\mathbb{R}_\lambda)$ 上で本質的に自己共役であることと (iii) を利用して，H が $\mathcal{S}(\mathbb{R}_x)$ 上で本質的に自己共役であることを示せ．

(vi) (iv), (v) から，演算子の等式 $U\bar{H}U^{-1} = \mu\lambda$ が成立することを示せ．

(vii) (vi) から，$\sigma(\bar{H}) = \mathbb{R}$, $\sigma_{\mathrm{p}}(\bar{H}) = \emptyset$ を示せ．

(viii) (vi) から，任意の $t \in \mathbb{R}$ と $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x)$ に対して，

$$(e^{-itH/\hbar}\psi)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(k) \exp\left\{\frac{i\hbar^2}{6m\mu}\left[\left(k - \frac{\mu t}{\hbar}\right)^3 - k^3\right]\right\} e^{i(k-\frac{t\mu}{\hbar})x} dk$$

が成立することを示せ．

21. $\{b_j\}_{j=1}^d$ を H で稠密に定義された線形演算子の組とし，D を，

$$\mathsf{D} \subset \cap_{j,k=1}^d [\mathsf{D}(b_j b_k^*) \cap \mathsf{D}(b_k^* b_j) \cap \mathsf{D}(b_j b_k) \cap \mathsf{D}(b_j^* b_k^*)]$$

をみたす稠密な部分空間とする．さらに，D 上で反交換関係

$$\{b_j, b_k^*\} = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \cdots, d, \tag{b.1}$$

が成立するとする[*40]．

(i) 各 b_j は有界であり，$\|b_j\| = 1$ であることを証明せよ．

(ii) b_j の閉包 $\bar{b}_j$ について，演算子の等式

$$\{\bar{b}_j, (\bar{b}_k)^*\} = \delta_{jk}$$

が成立することを示せ．

(iii) (b.1) に加えて，D 上で

$$\{b_j, b_k\} = 0 = \{b_j^*, b_k^*\}, \quad j, k = 1, \cdots, d, \tag{b.2}$$

[*40] $\{A, B\} := AB + BA$.

をみたすならば，

$$c_j = b_j + (\bar{b}_j)^*, \quad d_j := i\left(b_j - (\bar{b}_j)^*\right)$$

によって定義される有界な自己共役演算子 c_j, d_j は

$$\begin{aligned} \{c_j, c_k\} &= 2\delta_{jk}, \quad \{d_j, d_k\} = 2\delta_{jk}, \\ \{c_j, d_k\} &= 0, \quad j, k = 1, \cdots, d, \end{aligned}$$

をみたすことを示せ．

注意．反交換関係 $(b.1), (b.2)$ を自由度 d の**正準反交換関係** (canonical anticommutation relations; 通常，CAR と略す) という．これをみたす対象をヒルベルト空間上の演算子として実現することを自由度 d の **CAR の表現**という（その具体例については，以下の問題 22, 23 を参照のこと）．

問 (iii) は，CAR の表現から，d 次元ユークリッド空間に同伴するクリフォード代数の自己共役表現（すなわち，生成子が自己共役演算子として実現される表現）が得られることを示す．

22. 2 次元ユニタリ空間 $\mathbb{C}^2$ において，演算子

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を考える．

(i) $\{b\}$ は自由度 1 の CAR の表現であること，すなわち，

$$b^2 = 0, \quad \{b, b^*\} = 1$$

が成立することを示せ．

(ii) $b^* + b = \sigma_1, \quad i(b - b^*) = \sigma_2$ であることを示せ（σ_1, σ_2 はパウリ行列）．

23. 0 と 1 からなる集合 $\{0, 1\}$ の d 個の直積集合

$$\{0,1\}^d := \{\mathbf{n} = (n_1, \cdots, n_d) | n_j = 0,\, 1,\ j = 1, \cdots, d\}$$

から $\mathbb{C}$ への写像の全体を $\mathcal{M}_d$ とする．

(i) 集合 $\mathcal{M}_d$ は，写像に対する自然な和とスカラー倍に対して複素ベクトル空間になり，$\dim \mathcal{M}_d = 2^d$ であることを証明せよ．

(ii) 二つの元 $\psi, \phi \in \mathcal{M}_d$ に対して，

$$\langle \psi, \phi \rangle := \sum_{\mathbf{n} \in \{0,1\}^d} \psi(\mathbf{n})^* \phi(\mathbf{n})$$

とすれば，これは $\mathcal{M}_d$ に内積を定め，この内積に関して $\mathcal{M}_d$ はヒルベルト空間であることを示せ．

(iii) ヒルベルト空間 $\mathcal{M}_d$ 上に演算子 b_j を

$$(b_j\psi)(n_1,\cdots,n_{j-1},0,n_{j+1},\cdots,n) := \psi(n_1,\cdots,n_{j-1},1,n_{j+1},\cdots,n),$$
$$(b_j\psi)(n_1,\cdots,n_{j-1},1,n_{j+1},\cdots,n) := 0, \quad \psi\in\mathcal{M}_d.$$

このとき，演算子の組 $\{b_j,b_j^*\}_{j=1}^d$ は自由度 d の CAR の表現をあたえることを示せ.

(iv) $\psi_0\in\mathcal{M}_d$ を

$$\psi_0(\mathbf{n}) = \begin{cases} 1 & ;\ \mathbf{n}=0\text{ のとき,} \\ 0 & ;\ \text{その他の場合} \end{cases}$$

によって定義すれば，$\mathcal{M}_d$ は,

$$(b_1^*)^{n_1}\cdots(b_d^*)^{n_d}\psi_0, \quad n_j=0,\,1,\ j=1,\cdots,d,$$

というベクトルたちによって生成されることを示せ.

(v) $\omega_j>0$ を定数とするとき，自己共役演算子 $H=\sum_{j=1}^d \omega_j b_j^* b_j$ のスペクトルを求めよ.

注意. (1) $d=1$ の場合，写像 $U:\mathcal{M}_1\to\mathbb{C}^2$ を $(U\psi):=(\psi(0),\psi(1))\in\mathbb{C}^2$, $\psi\in\mathcal{M}_1$, によって定義すれば，これはユニタリであり,

$$Ub_1U^{-1}=b$$

（b は問題 22 の演算子）となることが容易にわかる．すなわち，問題 22 における，自由度 1 の CAR の表現といまの場合のそれはユニタリ同値である.

(2) この問題における，自由度 d の CAR の表現は，互いに異なる d 種のフェルミオンからなる量子系を記述するのに用いられる．実際，各 $\mathbf{n}\in\{0,1\}^d$ に対して，$\psi_{\mathbf{n}}\in\mathcal{M}_d$ を $\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}')=\delta_{\mathbf{n}\mathbf{n}'}$ によって定義すれば，ベクトル $\psi_{\mathbf{n}}$ は，1 種類目のフェルミオンが n_1 個，2 種類目のフェルミオンが n_2 個 ,$\cdots$,d 種類目のフェルミオンが n_d 個存在する状態を表わすと解釈される（フェルミオンは同一の状態に高々1 個しか存在できないことに注意）．状態空間 $\mathcal{M}_d$ はフェルミオンが全然ない状態 ψ_0，1 個ある状態 (${}_dC_1$ 通り)，2 個ある状態 (${}_dC_2$ 通り),$\cdots$,d 個ある状態 (${}_dC_d=1$ 通り) から生成される (問 (iv))．問 (v) の演算子 H は，このような系の自由な—フェルミオンどうしの相互作用がない— ハミルトニアンを表わす.

4
多　粒　子　系

任意の有限個または無限個の量子力学的粒子からなる系—多粒子系あるいは多体系—の状態のヒルベルト空間と物理量について叙述する．このような系の状態のヒルベルト空間は，数学的には，ヒルベルト空間のテンソル積を基本的素材として構成される．同種の量子力学的粒子は区別できないという原理—不可弁別性の原理—を数学的に定式化し，同種の粒子からなる多粒子系の状態の構造にはある種の制限が伴うことを見る．状態のヒルベルト空間のテンソル積構造と呼応して，多粒子系の物理量は演算子のテンソル積の概念を用いて構成される．さらに，生成・消滅する素粒子からなる系の状態を記述するための基本的なヒルベルト空間としてフォック空間を導入する．これは場の量子論を数学的に厳密に構成するための基本的な枠組みのひとつを提供する．

4.1　状態空間—ヒルベルト空間のテンソル積

4.1.1　シュレーディンガー表現における多粒子系の状態空間の構造

すでに見たように，d 次元空間 $\mathbb{R}^d$ にある（空間的自由度だけを有する）N 個の粒子からなる量子系の状態のヒルベルト空間として，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})$ をとることが可能であった．この状態空間は 1 粒子の状態空間 $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ とどのような関係にあるであろうか．この問題を考察するには，ひとつのヒルベルト空間の土台となるのはその完全正規直交系 (CONS) たちであることに注目すればよい．すると，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})$ の CONS と $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ のそれとの関連を調べることに導かれる．結論から言えば次の定理が成り立つ：

定理 4.1　$\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ の CONS とし，N 個の自然数の組 $\mathbf{n} = (n_1, \cdots,$

$n_N) \in \mathbb{N}^N$ に対して，

$$\psi_{\mathbf{n}}(x) := \prod_{j=1}^{N} \psi_{n_j}(x_j), \quad x = (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^{dN},$$

とおく．このとき，$\{\psi_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^N}$ は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})$ の CONS である．

この定理は，次の一般的な定理の応用から得られる．

定理 4.2 (M_1, μ_1), (M_2, μ_2) を二つの測度空間とする．$L^2(M_j, d\mu_j), j = 1, 2,$ は可分であるとし，$\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$, $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ を，それぞれ，$\mathsf{L}^2(M_1, \mu_1)$, $\mathsf{L}^2(M_2, \mu_2)$ の CONS とする．ヒルベルト空間 $\mathsf{L}^2(M_1 \times M_2, d\mu_1 \otimes d\mu_2)$ ($M_1 \otimes M_2$ 上の直積測度 $\mu_1 \otimes \mu_2$ 関する L^2 空間) の元 $\Omega_{n,m}$ を

$$\Omega_{m,n}(x, y) = \psi_m(x)\phi_n(y), \quad x \in M_1, y \in M_2,$$

によって定義する．このとき，$\{\Omega_{m,n}\}_{m,n=1}^\infty$ は $L^2(M_1 \times M_2, d\mu_1 \otimes d\mu_2)$ の CONS である．

証明 $\{\Omega_{m,n}\}_{m,n}$ の正規直交性は容易に確かめられる．その完全性を示すために，$f \in \mathsf{L}^2(M_1 \times M_2, d\mu_1 \otimes d\mu_2)$ がすべての m, n に対して

$$\langle f, \Omega_{m,n}\rangle = \int_{M_1\times M_2} f(x,y)^* \Omega_{m,n}(x,y) d\mu_1 \otimes d\mu_2(x,y) = 0$$

をみたすとしよう．シュヴァルツの不等式により，$|f(x,y)|\,|\psi_m(x)|\,|\phi_n(y)|$ は可積分であるから，フビニの定理により，上の式は

$$\int_{M_2} \left(\int_{M_1} f(x,y)^* \psi_m(x) d\mu_1(x) \right) \phi_n(y) d\mu_2(y) = 0$$

と書き直せる．$\{\phi_n\}_n$ の完全性により，$\mu_2(S_m) = 0$ をみたす集合 $S_m \subset M_2$ があって，$y \in M_2 \setminus S_m$ ならば

$$\int_{M_1} f(x,y)^* \psi_m(x) d\mu_1(x) = 0 \tag{4.1}$$

となる．したがって，$S = \cup_{m=1}^\infty S_m$ とすれば，$\mu_2(S) = 0$ であって，任意 $y \in M_2 \setminus S$ とすべての m に対して (4.1) が成立する．そこで，今度は，$\{\psi_m\}_m$

の完全性を用いれば，$f(x,y)=0$, μ_1-a.e.x, $y \in M_2 \setminus S$, となる．したがって，フビニの定理により，$f(x,y)=0$, $\mu_1 \otimes \mu_2$-a.e. である．ゆえに，1 章の定理 1.18(iv) によって，定理の主張がでる． □

定理 4.1 の証明

まず，定理 4.2 で，$M_1 = M_2 = \mathbb{R}^d$, $\mu_1 = \mu_2 = d$ 次元ルベーグ測度とすれば，$N=2$ のときの主張が得られる．次に，この結果を用いて，$M_1 = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, M_2 = \mathbb{R}^d$ として，定理 4.2 を応用すれば，$N=3$ の場合の主張が得られる．以下，同様にして，帰納法により，任意の N に対して主張が証明される． □

注意 定理 4.1 の証明と同様にして，定理 4.2 は，任意の有限個の測度空間に関する場合へと一般化できる（章末演習問題 1).

定理 4.1 は，ベクトルの集合 $\{\psi_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}}$ によって生成される部分空間 $\mathcal{L}(\{\psi_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}})$ が $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})$ で稠密であることを意味する．これは，つまり，1 粒子状態のヒルベルト空間 $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ の関数の N 個の積（ただし，各因子の変数は独立）の一次結合の全体が N 粒子の状態空間 $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})$ において稠密であることを意味する．しかも，そのような関数は変数が分離しているという意味で，数学的に扱いやすい．この意味でも，定理 4.1 は有用な定理である．

ところで，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})$ は，量子力学系の状態のヒルベルト空間としては，CCR のシュレーディンガー表現に同伴するものであり，その意味で特殊な状態空間である．普遍的な観点からは，他の CCR の表現に同伴する多粒子系を論じるための一般的枠組みを構成する必要がある．そのためには，まず，一般的な多粒子系の状態の記述を可能にする概念を定義しなければならない．これに対する鍵は，定理 4.1 にいう，$\psi_{\mathbf{n}}$ を通しての，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})$ と $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ の関係にある．この関係に関して，ある種の抽象化を行なうとヒルベルト空間のテンソル積とよばれる概念が得られる．これを次に叙述しよう．

4.1.2 ヒルベルト空間のテンソル積

$\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2$ をヒルベルト空間とする．各ベクトル $\Psi \in \mathsf{H}_1, \Phi \in \mathsf{H}_2$ に対して，直積空間 $\mathsf{H}_1 \times \mathsf{H}_2$ から $\mathbb{C}$ への写像 $\Psi \otimes \Phi$ を

$$(\Psi \otimes \Phi)(\psi, \phi) = \langle \psi, \Psi \rangle_{\mathsf{H}_1} \langle \phi, \Phi \rangle_{\mathsf{H}_2}, \quad (\psi, \phi) \in \mathsf{H}_1 \times \mathsf{H}_2,$$

によって定義する．この写像は反線形である．すなわち，すべての $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{C}, \psi_j \in \mathsf{H}_1, \phi_j \in \mathsf{H}_2, j = 1, 2,$ に対して，

$$(\Psi \otimes \Phi)(\alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2, \beta_1 \phi_1 + \beta_2 \phi_2) = \sum_{j,k=1}^{2} \alpha_j^* \beta_k^* (\Psi \otimes \Phi)(\psi_j, \phi_k)$$

が成り立つ．また，すべての $\alpha_j,\ \beta_k \in \mathbb{C},\ \Psi_j \in \mathsf{H}_1,\ \Phi_k \in \mathsf{H}_2,\ j = 1, \cdots, m,$ $k = 1, \cdots, n$ $(n, m \in \mathbb{N})$ に対して

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \Psi_j \right) \otimes \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k \Phi_k \right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_j \beta_k \Psi_j \otimes \Phi_k \tag{4.2}$$

が成立する．

さて，$\Psi \otimes \Phi$ $(\Psi \in \mathsf{H}_1,\ \Phi \in \mathsf{H}_2)$ の一次結合の全体を $\mathsf{H}_1 \hat{\otimes} \mathsf{H}_2$ としよう：

$$\mathsf{H}_1 \hat{\otimes} \mathsf{H}_2 := \left\{ \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \Psi_j \otimes \Phi_k \,\middle|\, m, n \geq 1, \alpha_{jk} \in \mathbb{C}, \Psi_j \in \mathsf{H}_1, \Phi_k \in \mathsf{H}_2, \right.$$
$$\left. j = 1, \cdots, m, k = 1, \cdots, n \right\}. \tag{4.3}$$

これはベクトル空間になる*1．このベクトル空間を H_1 と H_2 の**代数的テンソル積** (algebraic tensor product) という．$\mathsf{H}_1 \hat{\otimes} \mathsf{H}_2$ の中のベクトルで $\Psi \otimes \Phi$ $(\Psi \in \mathsf{H}_1, \Phi \in \mathsf{H}_2)$ という形をしているものを $\mathsf{H}_1 \hat{\otimes} \mathsf{H}_2$ の**生成元**とよぶことにする．

(4.3) の右辺の集合の中の元 $\eta := \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \Psi_j \otimes \Phi_k$ は，$\Phi'_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \Phi_k$, $\Psi'_k = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jk} \Psi_j$ とおけば，(4.2) によって，

$$\eta = \sum_{j=1}^{m} \Psi_j \otimes \Phi'_j = \sum_{k=1}^{n} \Psi'_k \otimes \Phi_k$$

---

*1 零ベクトルは，H_j の零ベクトルを 0_j とすれば，$0_1 \otimes 0_2$.

と書ける．したがって，$\mathsf{H}_1\widehat{\otimes}\mathsf{H}_2$ は，実は，

$$\mathsf{H}_1\widehat{\otimes}\mathsf{H}_2 = \left\{\sum_{j=1}^{m}\Psi_j\otimes\Phi_j \middle| m\geq 1, \Psi_j\in\mathsf{H}_1, \Phi_j\in\mathsf{H}_2,\ j=1,\cdots,m\right\} \tag{4.4}$$

という，より簡単な形に表わされる．

さて，$\mathsf{H}_1\widehat{\otimes}\mathsf{H}_2$ 上に内積を導入しよう．そのために，まず，このベクトル空間上に準双線形形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を

$$\langle\Psi\otimes\Phi, \Psi'\otimes\Phi'\rangle = \langle\Psi,\Psi'\rangle_{\mathsf{H}_1}\langle\Phi,\Phi'\rangle_{\mathsf{H}_2}, \quad \Phi,\Psi'\in\mathsf{H}_1, \Phi,\Phi'\in\mathsf{H}_2,$$

によって定義する．$\mathsf{H}_1\widehat{\otimes}\mathsf{H}_2$ の任意の元に対しては，線形性により拡張する．すなわち，任意の $\Psi_j,\Psi'_j\in\mathsf{H}_1,\Phi_k,\Phi'_k\in\mathsf{H}_2$ に対して，

$$\begin{aligned}\left\langle\sum_{j=1}^{m}\Psi_j\otimes\Phi_j, \sum_{k=1}^{n}\Psi'_k\otimes\Phi'_k\right\rangle &:= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\langle\Psi_j\otimes\Phi_j,\Psi'_k\otimes\Phi'_k\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\langle\Psi_j,\Psi'_k\rangle_{\mathsf{H}_1}\langle\Phi_j,\Phi'_k\rangle_{\mathsf{H}_2}.\end{aligned} \tag{4.5}$$

しかし，この場合，$\mathsf{H}_1\widehat{\otimes}\mathsf{H}_2$ の元を生成元の一次結合として表わす仕方は一般には一通りとは限らないから，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ の定義が意味をもつためには，任意の $F,G\in\mathsf{H}_1\widehat{\otimes}\mathsf{H}_2$ に対して，$\langle G,F\rangle$ は，F,G を生成元の一次結合として表わす仕方によらないことを示す必要がある．これは次のようにしてなされる．元 $F\in\mathsf{H}_1\widehat{\otimes}\mathsf{H}_2$ が $F=\sum_{j=1}^{m}\Psi_j\otimes\Phi_j=\sum_{k=1}^{n}\Psi'_k\otimes\Phi'_k$ のように 2 通りに表わされたとして，$F_1=\sum_{j=1}^{m}\Psi_j\otimes\Phi_j$，$F_2=\sum_{k=1}^{n}\Psi'_k\otimes\Phi'_k$ とおく．したがって，$F=F_1=F_2$ であるから，$\eta:=F_1-F_2$ とおけば，これは $\mathsf{H}_1\widehat{\otimes}\mathsf{H}_2$ の零ベクトルである．ゆえに，任意の $\psi\in\mathsf{H}_1,\phi\in\mathsf{H}_2$ に対して，$\eta(\psi,\phi)=0$．一方，$\Psi\otimes\Phi$ と $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の定義から，

$$(\Psi\otimes\Phi)(\psi,\phi)=\langle\psi\otimes\phi,\Psi\otimes\Phi\rangle, \quad \Psi,\psi\in\mathsf{H}_1,\Phi,\phi\in\mathsf{H}_2.$$

したがって，$\langle \psi \otimes \phi, \eta \rangle = 0$ となる．ゆえに，任意の $G \in \mathsf{H}_1 \widehat{\otimes} \mathsf{H}_2$ に対して $\langle G, \eta \rangle = 0$，すなわち，$\langle G, F_1 \rangle = \langle G, F_2 \rangle$ が成り立つ．これから，G が $G = G_1 = G_2$ ($G_j \in \mathsf{H}_1 \widehat{\otimes} \mathsf{H}_2$, $j = 1, 2$) と 2 通りに表わされたとすれば，

$$\langle G_1, F_1 \rangle = \langle G_1, F_2 \rangle = \langle G_2, F_1 \rangle = \langle G_2, F_2 \rangle$$

したがって，$\langle G, F \rangle = \langle G_1, F_1 \rangle = \langle G_2, F_2 \rangle$ が得られる．ゆえに，望む結果が示された．

さらに次の事実が成立する．

補題 4.3 (4.5) によって定義される，$\mathsf{H}_1 \widehat{\otimes} \mathsf{H}_2$ 上の準双線形形式 $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ は内積である．

証明 内積の対称性と線形性は明らかであるから，正定値性だけを示す．$F = \sum_{j=1}^m \Psi_j \otimes \Phi_j$, $\Psi_j \in \mathsf{H}_1, \Phi_j \in \mathsf{H}_2$, としよう．$\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2$ を，それぞれ，$\{\Psi_j\}_{j=1}^m$, $\{\Phi_j\}_{j=1}^m$ で張られる部分空間とする．$\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2$ の正規直交基底を，それぞれ，$\{e_k\}_{k=1}^{N_1}, \{f_l\}_{l=1}^{N_2}$ とすれば，$\Psi_j = \sum_{k=1}^{N_1} a_{jk} e_k$, $\Phi_j = \sum_{l=1}^{N_2} b_{jl} f_l$ と表わされる．ここで，a_{jk}, b_{jl} は複素定数である．したがって，$F = \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} c_{kl}(e_k \otimes f_l)$. ただし，$c_{kl} = \sum_{j=1}^m a_{jk} b_{jl}$. ゆえに，

$$\begin{aligned}
\langle F, F \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} c_{kl}(e_k \otimes f_l), \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{n=1}^{N_2} c_{mn}(e_m \otimes f_n) \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{n=1}^{N_2} c_{kl}^* c_{mn} \langle e_k \otimes f_l, e_m \otimes f_n \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{n=1}^{N_2} c_{kl}^* c_{mn} \langle e_k, e_m \rangle \langle f_l, f_n \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} |c_{kl}|^2.
\end{aligned}$$

これは，$\langle F, F \rangle \geq 0$ を意味し，また，$\langle F, F \rangle = 0$ ならば $c_{kl} = 0$，したがって，$F = 0$ を意味する．ゆえに，$\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ は正定値である． □

上の補題により，次の定義が可能になる．

定義 4.4 (4.5) で定義される内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関して，$\mathsf{H}_1\widehat{\otimes}\mathsf{H}_2$ を完備化して得られるヒルベルト空間を H_1 と H_2 の**テンソル積**といい，$\mathsf{H}_1\otimes\mathsf{H}_2$ と記す[*2].

内積空間の完備化の仕方により，$\mathsf{H}_1\widehat{\otimes}\mathsf{H}_2$ は，$\mathsf{H}_1\otimes\mathsf{H}_2$ において稠密な部分空間と同一視される.

次の命題は，ヒルベルト空間のテンソル積の基本的構造のひとつをあたえる.

命題 4.5 $\{\Psi_k\}_{k=1}^M,\{\Phi_l\}_{l=1}^N$ $(M,N\le\infty)$ が，それぞれ，$\mathsf{H}_1,\mathsf{H}_2$ の CONS ならば，$\{\Psi_k\otimes\Phi_l|1\le k\le M,1\le l\le N\}$ は $\mathsf{H}_1\otimes\mathsf{H}_2$ の CONS である.

証明 $M=N=\infty$ の場合だけを証明する．他の場合も同様である．$\{\Psi_k\otimes\Phi_l\}_{k,l=1}^\infty$ が正規直交系であることは容易にわかる．これが完全であることを証明するには，M を $\{\Psi_k\otimes\Phi_l\}_{k,l=1}^\infty$ によって生成される部分空間の閉包とし，$\mathsf{H}_1\widehat{\otimes}\mathsf{H}_2\subset\mathsf{M}\cdots(*)$ を示せばよい．実際，これができたとすれば，M は稠密な閉部分空間であることになり，したがって，M は $\mathsf{H}_1\otimes\mathsf{H}_2$ に一致しなければならない．ゆえに，正規直交系 $\{\Psi_k\otimes\Phi_l\}_{k,l=1}^\infty$ は完全であることが結論される.

さて，$\Psi\otimes\Phi\in\mathsf{H}_1\widehat{\otimes}\mathsf{H}_2$ とすれば，$\Psi=\sum_{k=1}^\infty a_k\Psi_k$，$\Phi=\sum_{l=1}^\infty b_l\Phi_l$ と展開できる．ここで，$a_k=\langle\Psi_k,\Psi\rangle$，$b_l=\langle\Phi_l,\Phi\rangle$ であり，$\|\Psi\|^2=\sum_{k=1}^\infty|a_k|^2<\infty$，$\|\Phi\|^2=\sum_{l=1}^\infty|b_l|^2<\infty\cdots(**)$ が成り立つ．直接計算により

$$\left\|\sum_{k=1}^M\sum_{l=1}^N a_kb_l\Psi_k\otimes\Phi_l-\Psi\otimes\Phi\right\|^2=\|\Psi\|^2\|\Phi\|^2-\left(\sum_{k=1}^M|a_k|^2\right)\left(\sum_{l=1}^N|b_l|^2\right).$$

この右辺は，$(**)$ によって，$M,N\to\infty$ のとき，0 に収束するから，$\Psi\otimes\Phi=\lim_{M,N\to\infty}\sum_{k=1}^M\sum_{l=1}^N a_kb_l\Psi_k\otimes\Phi_l$．したがって，$\Psi\otimes\Phi\in\mathsf{M}$．これは $(*)$ を意味する. □

テンソル積の概念は，有限個のヒルベルト空間に対しても同様に定義される．概略だけを述べる．$\mathsf{H}_1,\cdots,\mathsf{H}_n$ をヒルベルト空間としよう．各 $\Psi_j\in\mathsf{H}_j$ に対して，$\mathsf{H}_1\times\cdots\times\mathsf{H}_n$ 上の反線形形式 $\Psi_1\otimes\Psi_2\otimes\cdots\otimes\Psi_n$ を

$$(\Psi_1\otimes\Psi_2\otimes\cdots\otimes\Psi_n)(\psi_1,\cdots,\psi_n)=\langle\psi_1,\Psi_1\rangle_{\mathsf{H}_1}\cdots\langle\psi_n,\Psi_n\rangle_{\mathsf{H}_n},$$
$$\psi_j\in\mathsf{H}_j,j=1,\cdots,n,$$

*2 内積空間の完備化については，第 1 章の 1.4.4 項を参照のこと.

によって定義する．$\Psi_1 \otimes \Psi_2 \otimes \cdots \otimes \Psi_n, \Psi_j \in \mathsf{H}_j, j = 1, \cdots, n,$ の一次結合の全体を $\mathsf{H}_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} \mathsf{H}_n$ とするとき，この空間に

$$\langle \Psi_1 \otimes \cdots \otimes \Psi_n, \Phi_1 \otimes \cdots \otimes \Phi_n \rangle = \langle \Psi_1, \Phi_1 \rangle_{\mathsf{H}_1} \cdots \langle \Psi_n, \Phi_n \rangle_{\mathsf{H}_n}$$

によって内積が定義される．この内積に関して，$\mathsf{H}_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} \mathsf{H}_n$ を完備化して得られるヒルベルト空間を $\mathsf{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathsf{H}_n$ あるいは $\otimes_{j=1}^n \mathsf{H}_n$ と書き，$\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_n$ の**テンソル積**とよぶ．特に，$\mathsf{H}_1 = \cdots = \mathsf{H}_n = \mathsf{H}$ のとき，$\otimes_{j=1}^n \mathsf{H}_j = \otimes^n \mathsf{H}$ のように書き，これを H の $\boldsymbol{n}$ **重テンソル積** (n-fold tensor product) という．命題 4.5 の証明と全く同様にして，次の命題が証明される．

命題 4.6 $\{\Psi_{k_j}^{(j)}\}_{k_j=1}^{M_j}, j = 1, \cdots, n \ (M_j \le \infty)$ が H_j の CONS ならば，$\{\Psi_{k_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \Psi_{k_n}^{(n)} | 1 \le k_j \le M_j, j = 1, \cdots, n\}$ は $\mathsf{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathsf{H}_n$ の CONS である．

4.1.3 L^2 空間のテンソル積

$\mathsf{L}^2(M_j, d\mu_j), \psi_n, \phi_n, \Omega_{m,n}$ を定理 4.2 のものとしよう．4.1.2 項の結果によって，テンソル積 $\mathsf{L}^2(M_1, d\mu_1) \otimes \mathsf{L}^2(M_2, d\mu_2)$ が考えられる．定理 4.2 と命題 4.5 に留意すれば，定理 1.39 によって，$\mathsf{L}^2(M_1, d\mu_1) \otimes \mathsf{L}^2(M_2, d\mu_2)$ から $\mathsf{L}^2(M_1 \times M_2, d\mu_1 \otimes d\mu_2)$ へのユニタリ変換 U で

$$U\psi_m \otimes \phi_n = \Omega_{m,n}$$

をみたすものがただひとつ存在する．$\psi \in \mathsf{L}^2(M_1, d\mu_1), \phi \in \mathsf{L}^2(M_2, d\mu_2)$ に対して，$\psi = \sum_{m=1}^\infty a_m \psi_m, \phi = \sum_{n=1}^\infty b_n \phi_n$ と展開すれば

$$\begin{aligned} U(\psi \otimes \phi) &= U\left(\sum_{m=1}^\infty a_m \psi_m \otimes \sum_{n=1}^\infty b_n \phi_n\right) = U\left(\sum_{m,n=1}^\infty a_m b_n \psi_m \otimes \phi_n\right) \\ &= \sum_{m,n=1}^\infty a_m b_n \Omega_{m,n} = \sum_{m,n=1}^\infty a_m b_n \psi_m \times \phi_n \\ &= \psi \times \phi. \end{aligned}$$

ただし，M_j 上の関数 $f_j, j = 1, 2,$ に対して，$f_1 \times f_2$ は

$$(f_1 \times f_2)(x, y) := f_1(x) f_2(y), \quad (x, y) \in M_1 \times M_2$$

によって定義される，$M_1 \times M_2$ 上の関数である．こうして，次の定理が得られる：

定理 4.7　$\mathsf{L}^2(M_j, d\mu_j), j=1,2,$ は可分であるとする．このとき，$\mathsf{L}^2(M_1, d\mu_1) \otimes \mathsf{L}^2(M_2, d\mu_2)$ から $\mathsf{L}^2(M_1 \times M_2, d\mu_1 \otimes d\mu_2)$ へのユニタリ変換 U で，

$$U(\psi \otimes \phi) = \psi \times \phi, \quad \psi \in \mathsf{L}^2(M_1, d\mu_1), \phi \in \mathsf{L}^2(M_2, d\mu_2), \qquad (4.6)$$

をみたすものがただひとつ存在する．

この定理は，$\mathsf{L}^2(M_1, d\mu_1) \otimes \mathsf{L}^2(M_2, d\mu_2)$ と $\mathsf{L}^2(M_1 \times M_2, d\mu_1 \otimes d\mu_2)$ が，(4.6) をみたすユニタリ変換 U のもとで，同型であるとことを示している．この同型を $\mathsf{L}^2(M_1, d\mu_1) \otimes \mathsf{L}^2(M_2, d\mu_2)$ と $\mathsf{L}^2(M_1 \times M_2, d\mu_1 \otimes d\mu_2)$ との間の**自然な同型**といい，この同型の意味で，

$$\mathsf{L}^2(M_1, d\mu_1) \otimes \mathsf{L}^2(M_2, d\mu_2) = \mathsf{L}^2(M_1 \times M_2, d\mu_1 \otimes d\mu_2)$$

と記す．

例 4.1　$M_1 = M_2 = \mathbb{R}, d\mu_1 = d\mu_2 = dx$（ルベーグ測度）とすれば，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^2) = \mathsf{L}^2(\mathbb{R}) \otimes \mathsf{L}^2(\mathbb{R})$．

定理 4.7 の拡張として，次の定理が得られる（証明は定理 4.7 のそれと同様）：

定理 4.8　$(M_j, \mu_j), j = 1, \cdots, n$ を n 個の測度空間とし，$\mathsf{L}^2(M_j, d\mu_j)$ は可分であるとする．このとき，$\mathsf{L}^2(M_1, d\mu_1) \otimes \cdots \otimes \mathsf{L}^2(M_n, d\mu_n)$ から $\mathsf{L}^2(M_1 \times \cdots \times M_n, d\mu_1 \otimes \cdots \otimes d\mu_n)$ の上へのユニタリ変換 U_n で

$$U_n(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n) = \psi_1 \times \cdots \times \psi_n, \quad \psi_j \in \mathsf{L}^2(M_j, d\mu_j), j = 1, \cdots, n,$$

となるものがただひとつ存在する．

$n=2$ の場合と同様に，定理 4.8 にいう同型—**自然な同型**という—の意味で，

$$\mathsf{L}^2(M_1, d\mu_1) \otimes \cdots \otimes \mathsf{L}^2(M_n, d\mu_n) = \mathsf{L}^2(M_1 \times \cdots \times M_n, d\mu_1 \otimes \cdots \otimes d\mu_n)$$

と記す．

例 4.2　（空間的自由度だけを有する）N 個の量子力学的粒子の状態のヒルベルト空間 $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})$ は，1 粒子の状態空間 $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ の N 個のテンソル積 $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)\otimes\cdots\otimes\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ と自然な仕方で同型である：$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})=\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)\otimes\cdots\otimes\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

例 4.3　ハミルトニアンが自由なディラック演算子であたえられる相対論的な 1 粒子の系の状態空間として，$\mathbb{R}^3$ 上の，$\mathbb{C}^4$-値 2 乗可積分関数からつくられるヒルベルト空間 $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)$ が考えられた（3.4.3 項を参照）．このヒルベルト空間の一般化として，d,r を任意の自然数とするとき，$\mathbb{R}^d$ 上の，$\mathbb{C}^r$-値 2 乗可積分関数から形成されるヒルベルト空間

$$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^r)$$
$$:=\left\{\psi=(\psi_1,\cdots,\psi_r):\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}^r,\ \text{ボレル可測}\ \middle|\ \int_{\mathbb{R}^d}\|\psi(x)\|_{\mathbb{C}^r}^2dx<\infty\right\} \tag{4.7}$$

を考えるのは自然である．この場合，内積は

$$\langle\psi,\phi\rangle_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^r)}:=\int_{\mathbb{R}^d}\langle\psi(x),\phi(x)\rangle_{\mathbb{C}^r}dx$$

である（$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ の場合と同様に，いまの場合もルベーグ測度に関して a.e. 等しい関数は同じものとみなす）．$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^r)$ の N 重テンソル積はどのようなヒルベルト空間と“自然な”仕方で同一視できるかを考えよう．いま，

$$\begin{aligned} I_r &:= \{1,2,\cdots,r\},\\ I_r^N &:= I_r\times\cdots\times I_r=\{(s_1,\cdots,s_N)|s_j\in I_r, j=1,\cdots,N\}, \end{aligned}$$

とおく．I_r^N から $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})$ への写像の全体を $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})^{I_r^N}$ とし，各 $\psi\in\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})^{I_r^N}$ の $(s_1,\cdots,s_N)\in I_r^N$ における値を $\psi(\,\cdot\,;s_1,\cdots,s_N)$ と記す．したがって，

$$\int_{\mathbb{R}^{dN}}|\psi(x_1,\cdots,x_N;s_1,\cdots,s_N)|^2dx_1\cdots dx_N<\infty.$$

$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})^{I_r^N}$ には,

$$\langle\psi,\phi\rangle := \sum_{s_1,\cdots,s_N=1}^{r} \int_{\mathbb{R}^{dN}} \psi(x_1,\cdots,x_N;s_1,\cdots,s_N)^* \times\phi(x_1,\cdots,x_N;s_1,\cdots,s_N)dx_1\cdots dx_N,$$
$$\psi,\phi\in L^2(\mathbb{R}^{dN})^{I_r^N},$$

という自然な内積が入り，この内積に関して，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})^{I_r^N}$ はヒルベルト空間になる．これを見る簡単な方法は，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})^{I_r^N}$ が $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})$ の $r\times N$ 個 ($=I_r^N$ の元の個数) の直和と同一視できることに注目することである．

さて，写像 $W:\otimes^N\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^r)\to\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})^{I_r^N}$ を

$$W(\psi_1\otimes\cdots\otimes\psi_N)=\psi_{1s_1}\times\cdots\times\psi_{Ns_N}$$

によって定義しよう (ψ_{js} は $\psi_j\in\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^r)$ の j 番目の成分)．このとき，W は，$\otimes^N\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^r)$ から $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})^{I_r^N}$ へのユニタリ変換に一意的に拡大されることがわかる（証明は，上記の U や U_n の場合と同様）．この意味で，$\otimes^N\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^r)$ と $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})^{I_r^N}$ は自然な仕方で同型である．

4.1.4 ヒルベルト空間値の L^2 関数の空間とテンソル積

第 3 章，3.4.3 項で自由なディラック演算子を導入した．この演算子が働くヒルベルト空間は，$\mathbb{R}^3$ 上の $\mathbb{C}^4$-値の 2 乗可積分関数からつくられる L^2 空間：$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)$ であった．この空間は，もっと普遍的なヒルベルト空間の存在を示唆する．すなわち，$\mathbb{R}^3$ を一般の測度空間，$\mathbb{C}^4$ を一般のヒルベルト空間で置き換えて定義されるような L^2 空間，言い換えれば，ヒルベルト空間値の L^2 関数から構成されるヒルベルト空間の存在である．この項では，実際，そのようなヒルベルト空間を構成し，テンソル積との関連を調べる．この関連は，空間的自由度だけではなく，内部自由度をもった量子力学的粒子の多体系や無限自由度の量子力学である場の量子論を数学的にきちんと論じる際に重要な道具のひとつとなる．

$(\mathsf{X},\mathsf{B},\mu)$ を測度空間，H を可分なヒルベルト空間，$F:\mathsf{X}\to\mathsf{H}$ を X 上の H-値関数とする．もし，すべての $\Psi\in\mathsf{H}$ に対して，$\mathbb{C}$-値関数：$x\to\langle\Psi,F(x)\rangle_{\mathsf{H}}$, $x\in$

X, が B-可測であるならば，F は**可測**であるという．このような関数の全体を $M(\mathsf{X};\mathsf{H})$ で表わす．

ここでの最初の目的は，$M(\mathsf{X};\mathsf{H})$ の元 F で，$\int_{\mathsf{X}} \|F(x)\|_{\mathsf{H}}^2 d\mu(x) < \infty$ となるものの全体を考え，これにヒルベルト空間の構造が入ることを示すことである．そのために，まず，関数：$x \to \langle F(x), G(x)\rangle_{\mathsf{H}}$ $(G \in M(\mathsf{X};\mathsf{H}))$ が B-可測であることを示そう．これは，次のようにしてなされる．

H は可分であるから，CONS が存在する．そのひとつを $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ としよう（ここでは，$\dim \mathsf{H} = \infty$ の場合のみを考える；$\dim \mathsf{H} < \infty$ の場合は，もっと容易）．このとき，$\langle F(x), G(x)\rangle_{\mathsf{H}} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle F(x), \Phi_n\rangle_{\mathsf{H}} \langle \Phi_n, G(x)\rangle_{\mathsf{H}}$．仮定により，$\langle F(x), \Phi_n\rangle_{\mathsf{H}} \langle \Phi_n, G(x)\rangle_{\mathsf{H}}$ は可測であるから，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して，$\sum_{n=1}^{N} \langle F(x), \Phi_n\rangle_{\mathsf{H}} \langle \Phi_n, G(x)\rangle_{\mathsf{H}}$ も可測である．したがって，その各点収束の極限 $(N \to \infty)$ である $\langle F(x), G(x)\rangle_{\mathsf{H}}$ も可測である．$F = G$ の場合を考えると，関数：$x \to \|F(x)\|_{\mathsf{H}}^2$ も可測である．

いま証明した事実によって，

$$\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu; \mathsf{H}) := \left\{ F \in M(\mathsf{X};\mathsf{H}) \,\middle|\, \int_{\mathsf{X}} \|F(x)\|_{\mathsf{H}}^2 d\mu(x) < \infty \right\} \tag{4.8}$$

が定義される．ただし，通常の L^2 空間のように，$F = G \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} F(x) = G(x)$ μ-a.e.x によって元の間の相等を定義する．任意の $F, G \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu; \mathsf{H})$ に対して，シュヴァルツの不等式によって，

$$\begin{aligned} \int_{\mathsf{X}} |\langle F(x), G(x)\rangle_{\mathsf{H}}| d\mu(x) &\le \int_{\mathsf{X}} \|\mathsf{F}(x)\|_{\mathsf{H}} \|G(x)\|_{\mathsf{H}} d\mu(x) \\ &\le \left(\int_{\mathsf{X}} \|F(x)\|_{\mathsf{H}}^2 d\mu(x) \right)^{1/2} \left(\int_{\mathsf{X}} \|G(x)\|_{\mathsf{H}}^2 d\mu(x) \right)^{1/2} \\ &< \infty \end{aligned}$$

であるから，

$$\langle F, G\rangle := \int_{\mathsf{X}} \langle F(x), G(x)\rangle_{\mathsf{H}} d\mu(x) \tag{4.9}$$

が定義され，これは $\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu; \mathsf{H})$ の内積になる．$\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ の場合とまったく同様にして（付録 A, 定理 A.15 の証明を参照），$\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu; \mathsf{H})$ は，この内積に

関して，ヒルベルト空間になることが証明される．このヒルベルト空間の基本的な事実については章末演習問題 2 を見よ．

さて，$\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ は可分であると仮定しよう．$\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ の CONS のひとつを $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ とする（$\dim \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu) = \infty$ の場合を考える）．すると，命題 4.5 によって，$\{f_m \otimes \Phi_n\}_{m,n=1}^{\infty}$ は $\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu) \otimes \mathsf{H}$ の CONS である．

X 上の任意の複素数値 B-可測関数 f と $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，$f \times \Psi \in M(\mathsf{X}; \mathsf{H})$ を

$$(f \times \Psi)(x) = f(x)\Psi \tag{4.10}$$

によって定義する．容易にわかるように，$f \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ ならば，$f \times \Psi \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu; \mathsf{H})$ であり，

$$\langle f \times \Psi, g \times \Phi \rangle = \langle f, g \rangle_{\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)} \langle \Psi, \Phi \rangle_{\mathsf{H}} \quad (g \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu),\ \Phi \in \mathsf{H})$$

が成り立つ．これから，$\{f_m \times \Phi_n\}_{m,n=1}^{\infty}$ は $\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu; \mathsf{H})$ の正規直交系であることがわかる．これが，完全であることを示そう．

任意の $F \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu; \mathsf{H})$ について，$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \Phi_n, F(x) \rangle_{\mathsf{H}} \Phi_n$, μ-a.e.x が成り立つ．一方，複素数値関数：$x \to \langle \Phi_n, F(x) \rangle_{\mathsf{H}}$（の同値類）は $\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ の元であるから（シュヴァルツの不等式によって，$\|\langle \Phi_n, F(x) \rangle_{\mathsf{H}}|^2 \leq \|F(x)\|_{\mathsf{H}}^2$ であることに注意)，$\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ の収束の意味で，$\langle \Phi_n, F(x) \rangle_{\mathsf{H}} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} f_m(x)$ $\cdots (*)$ が成り立つ．ただし，

$$\begin{aligned} a_{nm} &:= \int_{\mathsf{X}} \langle \Phi_n, F(x) \rangle_{\mathsf{H}} f_m(x)^* d\mu(x) = \int_{\mathsf{X}} \langle (f_m \times \Phi_n)(x), F(x) \rangle_{\mathsf{H}} d\mu(x) \\ &= \langle f_m \times \Phi_n, F \rangle. \end{aligned}$$

ベクトル $F \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu; \mathsf{H})$ がすべての m, n に対して，$\langle f_m \times \Phi_n, F \rangle = 0$ をみたすならば，いま示したことから，$a_{nm} = 0$ である．したがって，上の $(*)$ によって，$\int_{\mathsf{X}} |\langle \Phi_n, F(x) \rangle_{\mathsf{H}}|^2 d\mu(x) = 0$, $n \in \mathbb{N}$．これは，各 n に対して，$\mu(K_n) = 0$ となる集合 $K_n \subset \mathsf{X}$（K_n は測度 μ に関する零集合）があって，$\langle \Phi_n, F(x) \rangle_{\mathsf{H}} = 0$, $x \in \mathsf{X} \backslash K_n$，が成立することを意味する．$K = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$ とすれば，$\mu(K) = 0$ であり，すべての n と $x \in \mathsf{X} \backslash K$ に対して，$\langle \Phi_n, F(x) \rangle_{\mathsf{H}} = 0$ が成り立つことに

なる．$\{\Phi_n\}_n$ は H の CONS であったから，$F(x)=0,\ x\in \mathsf{X}\setminus K$ がしたがう．ゆえに，$\mathsf{L}^2(\mathsf{X},d\mu;\mathsf{H})$ の元として，$F=0$ である．こうして，$\{f_m\times\Phi_n\}_{m,n=1}^{\infty}$ は完全であることがわかる．同時に，$\mathsf{L}^2(\mathsf{X},d\mu)$ が可分であれば，$\mathsf{L}^2(\mathsf{X},d\mu;\mathsf{H})$ も可分であることが示されたことにもなる．

以上の事実と定理 1.39 によって，ユニタリ変換 $U\ :\ \mathsf{L}^2(\mathsf{X},d\mu)\otimes\mathsf{H}\ \to\ \mathsf{L}^2(\mathsf{X},d\mu;\mathsf{H})$ で，すべての $m,n\in\mathbb{N}$ に対して

$$U(f_m\otimes\Phi_n)=f_m\times\Phi_n$$

をみたすものがただひとつ存在する．この場合，任意の $f\in\mathsf{L}^2(\mathsf{X},d\mu)$ と $\Psi\in\mathsf{H}$ に対して，

$$U(f\times\Psi)=f\times\Psi$$

が成り立つ．実際，

$$\begin{aligned} f\times\Psi &= \sum_{m,n=1}^{\infty}\langle f_m\otimes\Phi_n, f\times\Psi\rangle f_m\otimes\Phi_n \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty}\langle f_m, f\rangle_{\mathsf{L}^2(\mathsf{X},d\mu)}\langle\Phi_n,\Psi\rangle_{\mathsf{H}} f_m\otimes\Phi_n \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty}\langle f_m\times\Phi_n, f\times\Psi\rangle f_m\otimes\Phi_n \end{aligned}$$

であるから，U の連続性により，

$$\begin{aligned} U(f\times\Psi) &= \sum_{m,n=1}^{\infty}\langle f_m\times\Phi_n, f\times\Psi\rangle U(f_m\otimes\Phi_n) \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty}\langle f_m\times\Phi_n, f\times\Psi\rangle f_m\times\Phi_n \\ &= f\times\Psi. \end{aligned}$$

この同型対応 U を $\mathsf{L}^2(\mathsf{X},d\mu)\otimes\mathsf{H}$ と $\mathsf{L}^2(\mathsf{X},d\mu;\mathsf{H})$ の間の**自然な同型対応**という．この同型の意味で，

$$\mathsf{L}^2(\mathsf{X},d\mu)\otimes\mathsf{H}=\mathsf{L}^2(\mathsf{X},d\mu;\mathsf{H}) \tag{4.11}$$

と記す．

上に論述した事柄はもっと一般化される．$\mathsf{H}_j,\ j=1,\cdots,n$, を可分なヒルベルト空間，$(\mathsf{X}_j,\mathsf{B}_j,\mu_j),\ j=1,\cdots,n$, を測度空間で，各 $\mathsf{L}^2(\mathsf{X}_j,d\mu_j)$ は可分であるとしよう．このとき，$\otimes_{j=1}^n[\mathsf{L}^2(\mathsf{X}_j,d\mu_j)\otimes\mathsf{H}_j]$ から，$[\otimes_{j=1}^n\mathsf{L}^2(\mathsf{X},d\mu_j)]\otimes[\otimes_{j=1}^n\mathsf{H}_j]$ へのユニタリ変換 V で

$$V\left(\otimes_{j=1}^n[f_j\otimes\Psi_j]\right)=[\otimes_{j=1}^n f_j]\otimes[\otimes_{j=1}^n\Psi_j],$$
$$f_j\in\mathsf{L}^2(\mathsf{X}_j,d\mu_j),\ \Psi_j\in\mathsf{H}_j,\ j=1,\cdots,n,$$

をみたすものがただひとつ存在する．証明の考え方は上述の場合と同様であるから，詳細を埋めることは読者の演習とする．ユニタリ変換 V による $\otimes_{j=1}^n[\mathsf{L}^2(\mathsf{X}_j,d\mu_j)\otimes\mathsf{H}_j]$ と $[\otimes_{j=1}^n\mathsf{L}^2(\mathsf{X},d\mu_j)]\otimes[\otimes_{j=1}^n\mathsf{H}_j]$ との同型を，これらのヒルベルト空間の間の**自然な同型**という．この同型の意味で

$$\otimes_{j=1}^n[\mathsf{L}^2(\mathsf{X}_j,d\mu_j)\otimes\mathsf{H}_j]=[\otimes_{j=1}^n\mathsf{L}^2(\mathsf{X},d\mu_j)]\otimes[\otimes_{j=1}^n\mathsf{H}_j]$$

と記す．定理 4.8 から，$\otimes_{j=1}^n\mathsf{L}^2(\mathsf{X},d\mu_j)=\mathsf{L}^2\left(\mathsf{X}_1\times\cdots\times\mathsf{X}_n,d\mu_1\otimes\cdots\otimes d\mu_n\right)$ であるから，(4.11) を応用することにより，自然な同型対応の意味で，

$$\begin{aligned}&\otimes_{j=1}^n[\mathsf{L}^2(\mathsf{X}_j,d\mu_j)\otimes\mathsf{H}_j]\\&=[\otimes_{j=1}^n\mathsf{L}^2(\mathsf{X}_j,d\mu_j)]\otimes[\otimes_{j=1}^n\mathsf{H}_j]\\&=\mathsf{L}^2\left(\mathsf{X}_1\times\cdots\times\mathsf{X}_n,d\mu_1\otimes\cdots\otimes d\mu_n;\otimes_{j=1}^n\mathsf{H}_j\right)\end{aligned}\tag{4.12}$$

が成立することになる．

例 4.4 例 4.3 で導入したヒルベルト空間 $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^r)$ について，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^r)=\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)\otimes\mathbb{C}^r$.

例 4.5 (4.12) によって，

$$\otimes^N\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^r)=\otimes^N[\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)\otimes\mathbb{C}^r]=\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN};\otimes^N\mathbb{C}^r].$$

一方，

$$\otimes^N\mathbb{C}^r=\mathbb{C}^{I_r^N}$$

を示すのは難しくない（章末演習問題 3）．したがって，

$$\otimes^N \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^r) = \mathsf{L}^2\left(\mathbb{R}^{dN};\mathbb{C}^{I_r^N}\right).$$

容易にわかるように，

$$\mathsf{L}^2\left(\mathbb{R}^{dN};\mathbb{C}^{I_r^N}\right) = \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})^{I_r^N}.$$

ゆえに，

$$\otimes^N \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^r) = \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})^{I_r^N}.$$

こうして，例 4.3 の結果が再導出される．

4.1.5 多粒子系の状態のヒルベルト空間

N 個の量子系があるとし，これらをそれぞれ，$S_1,\cdots,S_N$, 系 S_j の状態のヒルベルト空間を H_j とする．いま，任意の $i,j=1,\cdots,N$, $i\neq j$, に対して，S_i を構成する量子力学的対象と S_j のそれは互いに区別できると仮定する*3．このとき，$S_1,\cdots,S_N$ のそれぞれを構成する量子力学的対象すべてが共存するような系 S を考えることができる．このような系も**広義の意味での多粒子系**とよぶことにし，記号的に $S=\Sigma_{j=1}^N S_j$ で表わす（この意味では，各 S_i は，たとえば，1 個の量子力学的粒子からなる必要はなく，普通の意味での多粒子系でもよい）*4．この多粒子系の状態のヒルベルト空間はどのようにとればよいであろうか．この問題を考察するために，まず，最も単純な状況を考えてみる．系 S において，部分系 S_i を構成する対象と S_j のそれとが相互作用をしない場合 $(i\neq j)$, S_i と S_j は相互作用をしないという．すべての異なる対 (i,j) $(i\neq j,\ i,j=1,\cdots,N)$ に対して，S_i と S_j の間に相互作用がない場合，系 S は**非相互作用系**であるという．一方，非相互作用系でない系は**相互作用系**とよばれる．非相互作用系に対して次の公理を設ける：

*3 複数の量子力学的対象が巨視的対象のように互いに区別できるか否かは自明な事柄ではない．実際，同種の粒子の場合には互いに区別できない．このような場合については後出の論述を参照．

*4 有限個の粒子からなる系だけでなく，たとえば，$N=2$ の場合で，S_1 は n 個の電子からなる系，S_2 は量子化された電磁場の系（無限個の光子からなる系）のような場合も念頭においている．

公理 QM6 系 S が非相互作用系のとき，S の状態のヒルベルト空間として，$\otimes_{j=1}^{N}\mathsf{H}_j$ がとれる．

例 4.6 空間的自由度だけを有する N 個の粒子からなる系の状態のヒルベルト空間 $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})$ は，例 4.2 によって，1 粒子の状態空間 $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ の N 重テンソル積 $\otimes^N\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ と自然な仕方で同一視できるので，確かに公理 QM6 が成立する．

公理 QM6 は，さしあたり，非相互作用系に関するものであるが，だからといって，つまらない公理というわけではない．というのは，この公理は，考察下にある量子力学的対象の相互作用が，ヒルベルト空間 $\mathsf{H}=\otimes_{j=1}^{N}\mathsf{H}_j$ 上で記述できる可能性を排除するものではないからである（それは，量子力学的対象とそれらの間の相互作用の種類に依存する）．実際，H を状態のヒルベルト空間として，相互作用を記述できる場合がある（H 上で相互作用を記述する仕方と相互作用の例については，次節を参照）．また，H 上では直接に記述できない相互作用の場合にも，H 上で“近似的な”相互作用を定義し，これに基づく理論を構成し，そうして得られる理論のある種の極限をとることによって，本来の相互作用のある理論を得ることができる場合がある．このような場合には，極限移行して得られる理論によって記述される系の状態のヒルベルト空間は，一般には，H と異なる．これは，CCR の表現論の観点からは，相互作用のない場合の理論と相互作用のある場合の理論においては，CCR の表現空間が，一般には，異なりかつ CCR の表現の意味でユニタリ同値になるとは限らないことを示す．いま述べたような極限操作が必要となる例は，場の量子論のような無限自由度の量子力学において，ごく普通に現われる．

4.1.6 不可弁別性の原理と量子力学的粒子の統計

前項で定式化した公理 QM6 は，互いに区別できる複数の量子系からつくられる多粒子系の状態に関するものであった．ところで，同種の対象から構成される多粒子系の場合には，実は，微視的対象に特有の性質を考慮しなければならない．すなわち，同種の粒子（たとえば，電子）どうしは原理的に区別できないという性質である．量子力学ではこの主張を**不可弁別性の原理** (principle of indistinguishability) として掲げる．これとは対照的に，古典物理学の対象

であるマクロ的な物質は，通常，同種のものであっても，原理的にすべて区別されうると仮定される．この意味でも，微視的対象は感覚的な常識に反する在り方をしているのである．

この項では，不可弁別性の原理を数学的に定式化し，そこから導かれる帰結を議論する．ある微視的対象—たとえば,（粒子的描像から見て）1 個の電子—からなる系の状態のヒルベルト空間が H で記述されるとする．このとき，仮にこれらが区別されるとすれば，公理 QM6 によって，これらの対象からなる非相互作用系の状態のヒルベルト空間は，H の N 重テンソル積 $\otimes^N \mathsf{H}$ にとれる．この場合，各対象に番号 $1, 2, 3, \cdots, N$ を割り当て，$\mathsf{H}_j := \mathsf{H}, j = 1, \cdots, N$, を j 番目の対象の状態のヒルベルト空間とみることができる．不可弁別性の原理を数学的にきちんと定式化するためには，まず，ヒルベルト空間 $\otimes^N \mathsf{H} = \otimes_{j=1}^N \mathsf{H}_j$ 上で，N 個の対象を入れ換える操作を記述する演算子を導入する必要がある．なぜなら，N 個の同種の対象が原理的に区別できないとすれば，そのような対象からなる系の状態はこれらの任意の入れ換えに対して不変なはずだからである．したがって，もし，そのような“入れ換え演算子”が定義されれば，同種の対象からなる系の状態のヒルベルト空間は，これらの入れ換え演算子のすべての作用に対して不変な状態から生成される，$\otimes^N \mathsf{H}$ の閉部分空間として定義するのが自然である．これが，以下の議論の発見法的観点である．

さて，ものの入れ換えあるいは置き換えの操作は数学的には置換の概念によって表現される．$\mathfrak{S}_N$ を n 文字 $\{1, \cdots, N\}$ の置換全体からなる集合，すなわち，$\{1, \cdots, N\}$ 上の **N 次の対称群**としよう．各 $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対して，$\hat{\otimes}^N \mathsf{H}$ (H の N 個の代数的テンソル積) を定義域とする，$\otimes^N \mathsf{H}$ 上の演算子 U_σ を

$$U_\sigma(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_N) = \psi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\sigma(N)}, \quad \psi_j \in \mathsf{H}, j = 1, \cdots, N, \tag{4.13}$$

によって定義する．ただし，$\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_N$ という形のベクトルの一次結合に対しては線形性によって拡張する．これが well-defined であることは容易に証明される．いま，H は可分であるとし，$\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ を H の CONS のひとつとす

る（以下の議論は，$\dim \mathsf{H} < \infty$ の場合も同様）．このとき，

$$\mathsf{D} := \mathcal{L}\left(\{\psi_{n_1} \otimes \cdots \psi_{n_N} | n_j \in \mathbf{N}, j = 1, \cdots, N\}\right) \tag{4.14}$$

とすれば，D は $\otimes^N \mathsf{H}$ で稠密であり，U_σ の定義によって，$\mathsf{D} \subset \mathsf{D}(U_\sigma)$．部分空間 D の任意の元は

$$\Psi = \sum_{n_1, \cdots, n_N = 1}^{K} C_{n_1 \cdots n_N} \psi_{n_1} \otimes \cdots \psi_{n_N} \tag{4.15}$$

という形をもつ．ただし，$C_{n_1 \cdots n_N}$ は定数，$K < \infty$．したがって，

$$U_\sigma \Psi = \sum_{n_1, \cdots, n_N = 1}^{K} C_{n_1 \cdots n_N} \psi_{n_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \psi_{n_{\sigma(N)}}.$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}
&\|U_\sigma \Psi\|^2 \\
&= \sum_{n_1, \cdots, n_N}^{K} \sum_{k_1, \cdots, k_N}^{K} C^*_{n_1 \cdots n_N} C_{k_1 \cdots k_N} \langle \psi_{n_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \psi_{n_{\sigma(N)}}, \psi_{k_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \psi_{k_{\sigma(N)}} \rangle \\
&= \sum_{n_1, \cdots, n_N}^{K} \sum_{k_1, \cdots, k_N}^{K} C^*_{n_1 \cdots n_N} C_{k_1 \cdots k_N} \langle \psi_{n_{\sigma(1)}}, \psi_{k_{\sigma(1)}} \rangle \cdots \langle \psi_{n_{\sigma(N)}}, \psi_{k_{\sigma(N)}} \rangle \\
&= \sum_{n_1, \cdots, n_N}^{K} \sum_{k_1, \cdots, k_N}^{K} C^*_{n_1 \cdots n_N} C_{k_1 \cdots k_N} \delta_{n_{\sigma(1)} k_{\sigma(1)}} \cdots \delta_{n_{\sigma(N)} k_{\sigma(N)}} \\
&= \sum_{n_1, \cdots, n_N}^{K} |C_{n_1 \cdots n_N}|^2 = \|\Psi\|^2
\end{aligned}$$

したがって，U_σ は等長演算子である．また，(4.15) の Ψ に対して，$\Phi = U_{\sigma^{-1}} \Psi$ とおけば，$\Phi \in \mathsf{D}$ であり，$U_\sigma \Phi = \Psi$ となる．したがって，U_σ は D から D の上への等長演算子である．ゆえに，拡大定理により，U_σ は $\otimes^N \mathsf{H}$ 上のユニタリ演算子に一意的に拡大される．この拡大も U_σ で表わす．

上に述べた，U_σ の全射性の証明とユニタリ性によって，

$$U_{\sigma^{-1}} = U_\sigma^{-1} = U_\sigma^* \tag{4.16}$$

が成り立つ．さらに，任意の $\tau, \sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対して，

$$U_\tau U_\sigma = U_{\sigma\tau} \tag{4.17}$$

が成立する．実際，まず，(4.17) が D 上で成立することは U_σ の定義から容易にわかる．これと $U_\sigma \restriction \mathsf{D}$ の拡大の一意性によって，(4.17) が得られる．

いま，考察下の N 粒子系の状態ベクトルの生成する部分空間を $\mathsf{D}_{\mathrm{phys}}(\otimes^N \mathsf{H})$ とし，$\Psi \in \mathsf{D}_{\mathrm{phys}}(\otimes^N \mathsf{H})$ を任意の状態ベクトルとしよう．このとき，不可弁別性の原理は，任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対して，$U_\sigma \Psi$ と Ψ は同一の状態を記述する，という形に定式化できる．したがって，公理 QM1 によって，

$$U_\sigma \Psi = c(\sigma)\Psi \tag{4.18}$$

をみたす定数 $c(\sigma) \neq 0$ が存在することになる．これは，$c(\sigma)$ が U_σ の固有値であって，Ψ はこれに属する固有ベクトルであることを意味する．

対応 $c : \sigma \to c(\sigma)$ は，$\mathfrak{S}_N$ 上の複素数値関数とみることができる．この関数の形を決定しよう．(4.18) の両辺に $U_\tau, \tau \in \mathfrak{S}_N$, を作用させ，(4.17) を使えば，

$$c(\tau)c(\sigma) = c(\tau\sigma), \quad \tau, \sigma \in \mathfrak{S}_N, \tag{4.19}$$

が成立する．

(4.19) をみたす関数 c は少なくとも二つあることはただちにわかる．実際，

$$\begin{aligned} c_1(\sigma) &:= 1, \quad \sigma \in \mathfrak{S}_N, \\ \mathrm{sgn}(\sigma) &:= \begin{cases} 1 & ; \sigma \text{ が偶置換のとき} \\ -1 & ; \sigma \text{ が奇置換のとき} \end{cases} \end{aligned}$$

によって定義される，$\mathfrak{S}_N$ 上の二つの関数 c_1 と sgn は (4.19) をみたす（関数 c_1 は恒等的に 1 に等しい関数であるから，これが (4.19) をみたすことは自明；対応：$\sigma \to \mathrm{sgn}(\sigma)$ は**置換の符号**とよばれる関数である）．実は，(4.19) をみたす関数 $c : \mathfrak{S}_N \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ はこれらの関数に限られることが証明される：

補題 4.9　関数 $c : \mathfrak{S}_N \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ は，$c = c_1$ または $c = \mathrm{sgn}$ のとき，かつこのときに限り，(4.19) をみたす．

証明 条件の必要性の部分だけを示せばよい．そこで，関数 c は (4.19) をみたすとする．I を恒等置換とすれば，$I^2 = I$ であるから，(4.19) によって，$c(I)^2 = c(I)$．したがって，$c(I) = 1$ （いま，すべての $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対して，$c(\sigma) \neq 0$ であることに注意）．次に σ を任意の互換（転置）とすれば，$\sigma^2 = I$．したがって，(4.19) によって，$c(\sigma)^2 = c(I) = 1$．ゆえに，$c(\sigma) = \pm 1$．そこで，二つの場合が考えられる: (i) すべての互換 σ に対して，$c(\sigma) = 1$ の場合と (ii) ある互換 σ_0 に対して，$c(\sigma_0) = -1$ となる場合である．

まず，(i) の場合を考えよう．任意の置換 $\tau \in \mathfrak{S}_N$ は互換の積で表わされる．すなわち，互換 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ が存在して，$\tau = \sigma_1 \cdots \sigma_n \cdots (*)$．(4.19) を繰り返し用いることにより，$c(\tau) = c(\sigma_1) \cdots c(\sigma_n) \cdots (**)$．いまの仮定により，$c(\sigma_j) = 1$, $j = 1, \cdots, n$．したがって，$c(\tau) = 1$．ゆえに，$c = c_1$．

(ii) の場合を考察するために，次に述べる事実に注意する．任意の二つの互換 σ_1, σ_2 に対して，$S \in \mathfrak{S}_N$ があって，$\sigma_1 = S\sigma_2 S^{-1}$ が成立する．実際，$\sigma_1 = (i_1 i_2)$ (i_1 と i_2 を入れ換え，他の数は入れ換えない置換), $\sigma_2 = (j_1 j_2)$ とし，$\{i_1, i_2, i_3, \cdots, i_n\} = \{1, \cdots, N\} = \{j_1, j_2, j_3, \cdots, j_n\}$ とすれば，

$$S := \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_N \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_N \end{pmatrix}$$

が求める S である．したがって，(4.19) によって，$c(\sigma_1) = c(S)c(\sigma_2)c(S^{-1})$．一方，任意の $\tau \in \mathfrak{S}_N$ に対して，$c(\tau)c(\tau^{-1}) = c(I) = 1$ であるから，

$$c(\tau^{-1}) = \frac{1}{c(\tau)}. \tag{4.20}$$

ゆえに，$c(\sigma_1) = c(\sigma_2)$．すなわち，互換に対する，$c$ の値はすべて等しい．

さて，(ii) の場合を考えよう．この場合，仮定と前段の事実により，すべての互換 σ に対して，$c(\sigma) = -1$ である．任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ は $(*)$ のように互換の積で表わされる．このとき，$(**)$ によって，$c(\tau) = (-1)^n$ となる．ゆえに $c = \mathrm{sgn}$ である． □

以下，$c : \mathfrak{S}_N \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ は (4.19) をみたす任意の関数—したがって，補題

4.9 により，$c = c_1$ または $c = \mathrm{sgn}$—とする．これに対して，

$$P_c := \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} c(\sigma) U_\sigma \tag{4.21}$$

という演算子を定義する．(4.17)，(4.19)，(4.20) を用いると，

$$U_\sigma P_c = P_c U_\sigma = c(\sigma) P_c, \quad \sigma \in \mathfrak{S}_N, \tag{4.22}$$

を得る．したがって，

$$P_c^2 = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} c(\sigma) U_\sigma P_c = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} c(\sigma)^2 P_c = P_c,$$

すなわち，

$$P_c^2 = P_c \tag{4.23}$$

が成立する．また，(4.16) と (4.19) から，

$$P_c^* = P_c \tag{4.24}$$

が導かれる．ゆえに，P_c は射影演算子である．特に，$\mathsf{R}(P_c)$ は閉部分空間である．

(4.21), (4.22) から，ベクトル $\Psi \in \mathsf{H}$ について，すべての $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ に対して，$U_\sigma \Psi = c(\sigma)\Psi$ が成立することと，$P_c \Psi = \Psi$ であることは同値になる．ゆえに，不可弁別性の原理を仮定した場合，いま考察している，N 個の同一対象からなる系の状態のヒルベルト空間は $\mathsf{R}(P_c)$ であるべきことが結論される．補題 4.9 によって，このようなヒルベルト空間は二種類しかない．すなわち，

$$S_N := P_{c_1} = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} U_\sigma. \tag{4.25}$$

$$A_N := P_{\mathrm{sgn}} = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) U_\sigma, \tag{4.26}$$

とすれば，$\mathsf{R}(S_N)$ と $\mathsf{R}(A_N)$ の二つがそれである．射影演算子 S_N，A_N はそれぞれ，N 次の**対称化演算子** (symmetrization operator)，**反対称化演算子** (anti-symmetrization operator) とよばれる．

こうして，不可弁別性の原理を仮定した場合，N 個の同一の対象からなる量子系の状態のヒルベルト空間は $\mathsf{R}(S_N)$ または $\mathsf{R}(A_N)$ で記述されなければならないことが帰結される．

二つのヒルベルト空間 $\mathsf{R}(S_N), \mathsf{R}(A_N)$ を，それぞれ，記号的に $\otimes_{\mathrm{s}}^N \mathsf{H}, \otimes_{\mathrm{as}}^N \mathsf{H}$ と書き，前者を H の N **重対称テンソル積** (N-fold symmetric tensor product)，後者を H の N **重反対称テンソル積** (N-fold anti-symmetric tensor product) とよぶ：

$$\otimes_{\mathrm{s}}^N \mathsf{H} := \mathsf{R}(S_N) = S_N(\otimes^N \mathsf{H}), \tag{4.27}$$

$$\otimes_{\mathrm{as}}^N \mathsf{H} := \mathsf{R}(A_N) = A_N(\otimes^N \mathsf{H}). \tag{4.28}$$

例 4.7 例 4.2 によって，

$$\begin{aligned}\mathsf{L}_{\mathrm{s}}^2(\mathbb{R}^{dN}) := \{\psi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN}) | \psi(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(N)}) \\ = \psi(x_1, \cdots, x_N), \text{ a.e., } \sigma \in \mathfrak{S}_N\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{L}_{\mathrm{as}}^2(\mathbb{R}^{dN}) := \{\psi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN}) | \psi(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(N)}) \\ = \mathrm{sgn}(\sigma)\psi(x_1, \cdots, x_N), \text{ a.e., } \sigma \in \mathfrak{S}_N\},\end{aligned}$$

とすれば，

$$\otimes_{\mathrm{s}}^N L^2(\mathbb{R}^d) = \mathsf{L}_{\mathrm{s}}^2(\mathbb{R}^{dN}),$$

$$\otimes_{\mathrm{as}}^N L^2(\mathbb{R}^d) = \mathsf{L}_{\mathrm{as}}^2(\mathbb{R}^{dN}),$$

が成り立つことがわかる（等号は，自然な仕方での同型の意味でとる）．量子力学の文脈では，ヒルベルト空間 $\mathsf{L}_{\mathrm{s}}^2(\mathbb{R}^{dN})$，$\mathsf{L}_{\mathrm{as}}^2(\mathbb{R}^{dN})$ の状態ベクトルは，それぞれ，**対称状態関数**，**反対称状態関数**とよばれる[*5]．

上の一般的帰結から，量子力学的粒子には二種類ありうることが導かれる．すなわち，ひとつは，1 粒子の状態のヒルベルト空間が H のとき，その N 粒

---

*5 これらは，“対称波動関数”，“反対称波動関数”とよばれる場合があるが，それは，初心者にとっては，誤解を招く言い方であろう．なぜなら，量子力学的な状態は，古典物理学的な意味での波動ではないからである．したがって，それがたとえ関数で表現されていようとも，それはあくまでも量子系の状態を記述する関数であって，古典物理学的に表象される何らかの波動を表わすものではない．

子系の状態が H の N 重対称テンソル積 $\otimes_{\mathrm{s}}^N \mathsf{H}$ で記述されるような粒子であり，もうひとつは，それが H の N 重反対称テンソル積 $\otimes_{\mathrm{as}}^N \mathsf{H}$ で記述されるような粒子である．前者の粒子は**ボース粒子** (Bose particle) あるいは**ボソン** (boson) とよばれ，後者の粒子は**フェルミ粒子** (Fermi particle) あるいは**フェルミオン** (fermion) とよばれる．こうして，互いに識別できない量子力学的粒子の多粒子系の状態には，それを構成する粒子の入れ換えに対して，ある種の制限が伴うことがわかる．これを同種の量子力学的粒子からなる系の状態に関する**統計**といい，ボース粒子は**ボース統計**（または**ボース-アインシュタイン統計**）に，フェルミ粒子は**フェルミ統計**（または**フェルミ-ディラック統計**）にしたがうという．

実際に観測される量子力学的粒子は，内部自由度のひとつとして，“スピン (spin)” とよばれる特性量を担っている．この場合，スピンの大きさは非負の整数値に限られる．たとえば，電子や陽子のスピンは 1/2，光の量子である光子のスピンは 1 である*6．実験的には，スピンが整数の粒子はボソンであり，スピンが半整数の粒子はフェルミオンであることが知られる．この事実を**スピンと統計の関係**という*7．

ヒルベルト空間 H の N 重反対称テンソル積 $\otimes_{\mathrm{as}}^N \mathsf{H}$ のベクトル Ψ については，(4.22) で $c = \mathrm{sgn}$ の場合の関係式

$$U_\sigma A_N = \mathrm{sgn}(\sigma) A_N, \quad \sigma \in \mathfrak{S}_N, \tag{4.29}$$

によって，任意の互換 (ij) $(i \neq j,\ i, j = 1, \cdots, N)$ に対して，

$$U_{(ij)} \Psi = -\Psi, \quad \Psi \in \otimes_{\mathrm{as}}^N \mathsf{H}, \tag{4.30}$$

が成り立つ．これから，ある重要な結論が出てくる．もし，2 個以上の同種の粒子がそこにおいて同じ状態を占めるような状態 $\Psi \in \otimes_{\mathrm{as}}^N \mathsf{H}$ があったとすれば，ある番号の組 $\{i, j\}$ があって，$U_{(ij)}\Psi = \Psi$ をみたすはずである（たとえば，$\Psi = A_N(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_N), \psi_j \in \mathsf{H}, j = 1, \cdots, N,$ とし，$\psi_i = \psi_j$ である場合）．

---

*6 スピンについては，続編『量子物理の数理』でもっと詳しく論じる．

*7 これは，相対論的場の量子論の公理系から，一般的に導くことが可能である．たとえば，ボゴリューボフ他『場の量子論の数学的方法』（江沢 洋 他訳，東京図書，1972）の第 5 章 §3 を参照のこと．

だが，(4.30) によって，この式の左辺は $-\Psi$ に等しい．したがって，$\Psi = 0$. すなわち，そのような状態 Ψ は存在しない．これは，物理的には，同種のフェルミ粒子からなる系では，2 個以上の粒子は同一の状態に入れないことを意味するものと解釈される．フェルミ粒子系に関するこの規則を**パウリの排他原理** (Pauli's exclusion principle) とよぶ．パウリの排他原理は，たとえば，巨視的物質の安定性にとって基本的な役割を演じている*8.

フェルミ粒子系とは対照的に，ボース粒子からなる系では，何個でも同一の状態に入ることができる*9.

4.2 物理量—演算子のテンソル積

前節の 4.1.5 項において，互いに区別でき，相互作用をしない，複数の量子系の対象たちが共存するような系の状態のヒルベルト空間として，おのおのの量子系の状態空間のテンソル積をとることができることが公理として設定された．この場合，次に問題になるのは，状態のヒルベルト空間をそのように選んだ場合,（広義の意味での）多粒子系の物理量はどのように決まるかということである．この節ではこの問題を考察する．まず，演算子のテンソル積の理論の基礎を叙述し，そのあとで，これを応用する形で，多粒子系の物理量について一般的な側面を議論する．

4.2.1 演算子のテンソル積

H, K をヒルベルト空間とし，A, B をそれぞれ，H, K 上の線形演算子とする．$\Psi \otimes \Phi, \Psi \in \mathsf{D}(A), \Phi \in \mathsf{D}(B)$, という形のベクトルによって生成される部分空間

$$\mathsf{D}(A)\hat{\otimes}\mathsf{D}(B) := \mathcal{L}\left(\{\Psi \otimes \Phi | \Psi \in \mathsf{D}(A), \Phi \in \mathsf{D}(B)\}\right) \tag{4.31}$$

を定義域とする演算子 $A\hat{\otimes}B$ を

$$(A\hat{\otimes}B)(\Psi \otimes \Phi) := A\Psi \otimes B\Phi \tag{4.32}$$

*8 このことに関する，もっと詳しい解説については，江沢　洋，"物質の安定性"（江沢　洋・恒藤敏彦編『量子物理学の展望 下』（岩波書店）の第 22 章）を参照.

*9 この原理の現われとして，超流動や超伝導現象があげられる.

によって定義する（$\mathsf{D}(A)\hat{\otimes}\mathsf{D}(B)$ の任意の元には線形性によって拡張する）.

補題 4.10 (i) $A\hat{\otimes}B$ はきちんと定義されている (well-defined) (すなわち，任意の $F \in \mathsf{D}(A)\hat{\otimes}\mathsf{D}(B)$ に対して，$(A\hat{\otimes}B)(F)$ は F を $\mathsf{D}(A)\hat{\otimes}\mathsf{D}(B)$ のベクトルの一次結合で表わす仕方によらない).

(ii) $\mathsf{D}(A), \mathsf{D}(B)$ が稠密であり，A, B が可閉ならば，$A\hat{\otimes}B$ は可閉である．この場合，

$$\overline{A\hat{\otimes}B} = \overline{\bar{A}\hat{\otimes}\bar{B}}, \tag{4.33}$$

$$A^*\hat{\otimes}B^* \subset (A\hat{\otimes}B)^* \tag{4.34}$$

が成立する.

証明 (i) $F \in \mathsf{D}(A)\hat{\otimes}\mathsf{D}(B)$ が $F = \sum_i \Psi_i \otimes \Phi_i = \sum_j \Psi'_j \otimes \Phi'_j \cdots (*)$ と二通りに表わされたとする（有限項の和）. $\{\Psi_i\}_i \cup \{\Psi'_j\}_j$ によって生成される部分空間を M_A, $\{\Phi_i\}_i \cup \{\Phi'_j\}_j$ によって生成される部分空間を M_B とし，$\{\eta_k\}_k$, $\{\theta_l\}_l$ をそれぞれ，$\mathsf{M}_A, \mathsf{M}_B$ の正規直交基底とする（これらの存在は，グラム-シュミットの直交化によって保証される）. このとき，$\Psi_i \otimes \Phi_i, \Psi'_j \otimes \Phi'_j$ は

$$\Psi_i \otimes \Phi_i = \sum_{k,l} a^i_{kl}\eta_k \otimes \theta_l, \quad \Psi'_j \otimes \Phi'_j = \sum_{k,l} b^j_{kl}\eta_k \otimes \theta_l,$$

という形に展開される．ただし，a^i_{kl}, b^j_{kl} は定数である. $(*)$ によって，任意の k, l に対して，$\sum_i a^i_{kl} = \sum_j b^j_{kl}$ が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned}(A\hat{\otimes}B)\left(\sum_i \Psi_i \otimes \Phi_i\right) &= \sum_{kl}\left(\sum_i a^i_{kl}\right)(A\eta_k \otimes B\theta_l) \\ &= \sum_{kl}\left(\sum_j b^j_{kl}\right)(A\eta_k \otimes B\theta_l) \\ &= (A\hat{\otimes}B)\left(\sum_j \Psi'_j \otimes \Phi'_j\right).\end{aligned}$$

ゆえに，$A\hat{\otimes}B$ はたしかにきちんと定義されている.

(ii) いまの仮定のもとでは，$\mathsf{D}(A)\hat{\otimes}\mathsf{D}(B)$ は稠密であるから，$A\hat{\otimes}B$ の共役演算子 $(A\hat{\otimes}B)^*$ が定義される．任意の $F \in \mathsf{D}(A)\hat{\otimes}\mathsf{D}(B), G \in \mathsf{D}(A^*)\hat{\otimes}\mathsf{D}(B^*)$ に対して，$\langle (A\hat{\otimes}B)(F), G\rangle = \langle F, (A^*\hat{\otimes}B^*)(G)\rangle$ であるから，(4.34) を得る．A, B は可閉であるから，$\mathsf{D}(A^*), \mathsf{D}(B^*)$ は稠密である．したがって，$\mathsf{D}(A^*)\hat{\otimes}\mathsf{D}(B^*)$ は $\mathsf{H}\otimes\mathsf{K}$ で稠密であるから，$\mathsf{D}((A\hat{\otimes}B)^*)$ もそうである．ゆえに，$A\hat{\otimes}B$ 可閉である．

定義から，明らかに $A\hat{\otimes}B \subset \bar{A}\hat{\otimes}\bar{B}$ であるから，$\overline{A\hat{\otimes}B} \subset \overline{\bar{A}\hat{\otimes}\bar{B}}$．逆の関係を示そう（このとき，(4.33) がしたがう）．任意の $F \in \mathsf{D}(\bar{A}\hat{\otimes}\bar{B})$ は，$F = \sum_i \Psi_i \otimes \Phi_i, \Psi_i \in \mathsf{D}(\bar{A}), \Phi \in \mathsf{D}(\bar{B})$, と表わされる（有限項の和）．このとき，各 i に対して，$\Psi_{i,n} \to \Psi_i, A\Psi_{i,n} \to \bar{A}\Psi_i, \Phi_{i,n} \to \Phi_i, B\Phi_{i,n} \to \bar{B}\Psi_i \ (n \to \infty)$ をみたす $\Psi_{i,n} \in \mathsf{D}(A), \Phi_{i,n} \in \mathsf{D}(B)$ が存在する．そこで，$F_n = \sum_i \Psi_{i,n} \otimes \Phi_{i,n}$ とおけば，$F_n \in \mathsf{D}(A)\hat{\otimes}\mathsf{D}(B)$ であり，$F_n \to F, (A\hat{\otimes}B)(F_n) \to (\bar{A}\hat{\otimes}\bar{B})(F) \ (n \to \infty)$ となる．したがって，$\bar{A}\hat{\otimes}\bar{B} \subset \overline{A\hat{\otimes}B}$．ゆえに，$\overline{\bar{A}\hat{\otimes}\bar{B}} \subset \overline{A\hat{\otimes}B}$． □

上の補題によって，次の定義が可能である：

A, B を，それぞれ，H, K 上の稠密に定義された可閉演算子とする．このとき，

$$A \otimes B := \overline{A\hat{\otimes}B}$$

によって定義される，$\mathsf{H}\otimes\mathsf{K}$ 上の閉演算子を A と B の**テンソル積**とよぶ．

注意 (4.33) によって，

$$A \otimes B = \bar{A} \otimes \bar{B} \tag{4.35}$$

が成立する．

補題 4.10 と同様にして，次の事実が証明される：

命題 4.11 A, B を，それぞれ，H, K 上の稠密に定義された可閉演算子とすれば，演算子 $A\otimes I + I\otimes B$ は可閉である．さらに，

$$A^* \otimes I + I \otimes B^* \subset (A \otimes I + I \otimes B)^*,$$
$$\overline{A \otimes I + I \otimes B} = \bar{A} \otimes I + I \otimes \bar{B}.$$

演算子のテンソル積の固有値に関する次の命題を証明するのは容易である：

命題 4.12 A, B を，それぞれ，H, K 上の稠密に定義された可閉演算子とすれば，次が成立する：$\Psi \in \ker(A-\lambda), \Phi \in \ker(B-\mu)$，$\Psi \neq 0, \Phi \neq 0$ $(\lambda, \mu \in \mathbf{R})$ ならば，$\Psi \otimes \Phi$ は $A \otimes B$，$A \otimes I + I \otimes B$ の固有ベクトルであり，

$$(A \otimes B)(\Psi \otimes \Phi) = \lambda\mu\Psi \otimes \Phi,$$

$$(A \otimes I + I \otimes B)(\Psi \otimes \Phi) = (\lambda + \mu)\Psi \otimes \Phi.$$

が成立する．したがって，

$$\{\lambda\mu | \lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A), \mu \in \sigma_{\mathrm{p}}(B)\} \subset \sigma_{\mathrm{p}}(A \otimes B),$$

$$\{\lambda + \mu | \lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A), \mu \in \sigma_{\mathrm{p}}(B)\} \subset \sigma_{\mathrm{p}}(A \otimes I + I \otimes B).$$

演算子 A, B がともに有界の場合には次の命題が成立する：

命題 4.13 A, B が H, K 上の有界演算子ならば，$A \otimes B$ は有界であり，

$$A \otimes B = (A \otimes I)(I \otimes B) = (I \otimes B)(A \otimes I), \tag{4.36}$$

$$\|A \otimes B\| = \|A\|\,\|B\|, \tag{4.37}$$

が成り立つ．

証明 $\{\Psi_j\}_j, \{\Phi_k\}_k$ を H, K の CONS とする．$F = \sum_{j,k} c_{jk}\Psi_j \otimes \Phi_k$ を $\mathsf{H}\hat{\otimes}\mathsf{K}$ の任意の元とする．このとき，

$$\begin{aligned}\|(A \otimes I)(F)\|^2 &= \sum_k \left\| \sum_j c_{jk} A\Psi_j \right\|^2 = \sum_k \left\| A \left(\sum_j c_{jk}\Psi_j \right) \right\|^2 \\ &\leq \sum_k \|A\|^2 \sum_j |c_{jk}|^2 = \|A\|^2 \sum_{j,k} |c_{jk}|^2 \\ &= \|A\|^2 \|F\|^2.\end{aligned}$$

$\mathsf{H}\hat{\otimes}\mathsf{K}$ は $\mathsf{H} \otimes \mathsf{K}$ で稠密であるから，$A \otimes I$ は有界であり，$\|A \otimes I\| \leq \|A\|$ を得る．同様に，$I \otimes B$ も有界であり，$\|I \otimes B\| \leq \|B\|$ が成り立つ．

$\mathsf{H}\hat{\otimes}\mathsf{K}$ 上で (4.36) が成立することは明らかである．したがって，前段の結果と極限移行により，(4.36) は $\mathsf{H}\otimes\mathsf{K}$ 上で成立する．ゆえに，$A\otimes B$ は有界であり，$\|A\otimes B\|\le\|A\otimes I\|\,\|I\otimes B\|\le\|A\|\,\|B\|$.

この逆の不等式を示そう（このとき，(4.37) がしたがう）．任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\|A\Psi\|\ge\|A\|-\varepsilon, \|B\Phi\|\ge\|B\|-\varepsilon$ をみたす単位ベクトル $\Psi\in\mathsf{H},\Phi\in\mathsf{K}$ が存在する．したがって，

$$\begin{aligned}\|(A\otimes B)(\Psi\otimes\Phi)\| &= \|A\Psi\|\,\|B\Phi\|\\ &\ge \|A\|\,\|B\|-\varepsilon(\|A\|+\|B\|)+\varepsilon^2.\end{aligned}$$

$\|(A\otimes B)(\Psi\otimes\Phi)\|\le\|A\otimes B\|$ であり，$\varepsilon>0$ は任意であるから，この不等式は $\|A\otimes B\|\ge\|A\|\,\|B\|$ を意味する．□

演算子のテンソル積は，任意の有限個のヒルベルト空間 $\mathsf{H}_1,\cdots,\mathsf{H}_n$ のテンソル積 $\otimes_{j=1}^n\mathsf{H}_j$ 上でも上記の $n=2$ の場合と全く同様に定義される．すなわち，A_j を H_j 上の稠密に定義された可閉演算子とすれば，

$$\hat{\otimes}_{j=1}^n\mathsf{D}(A_j):=\mathcal{L}\left(\{\otimes_{j=1}^n\psi_j|\psi_j\in\mathsf{D}(A_j),\ j=1,\cdots,n\}\right)$$

を定義域とする可閉演算子 $\hat{\otimes}A_j$ が

$$(\hat{\otimes}_{j=1}^nA_j)(\otimes_{j=1}^n\psi_j):=\otimes_{j=1}^n(A_j\psi_j),\quad \psi_i\in\mathsf{D}(A_i),\ i=1,\cdots,n,$$

によって定義される．この閉包を $\otimes_{j=1}^nA_j$ あるいは $A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_n$ のように記し，$A_1,\cdots,A_n$ のテンソル積という．これについては，すべての $n\ge3$ に対して，帰納的関係

$$A_1\otimes\cdots\otimes A_n:=(A_1\otimes\cdots\otimes A_{n-1})\otimes A_n \tag{4.38}$$

が成り立つ[*10]．$\otimes_{j=1}^nA_j$ に対しても，いちいち書かないけれども，上の諸命題は自然に拡張される．

[*10] $\otimes_{j=1}^nA_j$ は，(4.38) によって，帰納的に定義してもよい．この場合には，部分空間 $\hat{\otimes}_{j=1}^n\mathsf{D}(A_j)$ が $\otimes_{j=1}^nA_j$ の芯になることが証明される．

4.2.2 自己共役演算子のテンソル積

量子力学への応用にとって重要なのは自己共役演算子のテンソル積であるので，これに関して基本的な性質を調べておく．

以下，H, K をヒルベルト空間，A, B を，それぞれ，H, K 上の自己共役演算子とする．A, B のスペクトル測度を，それぞれ，E_A, E_B とする．

補題 4.14 $A\hat{\otimes}I$, $I\hat{\otimes}B$ は本質的に自己共役であり（したがって，$A\otimes I$, $I\otimes B$ は H $\otimes$ K 上の自己共役演算子），$A\otimes I$ と $I\otimes B$ は強可換である．さらに，$A\otimes I$, $I\otimes B$ のスペクトル測度は，それぞれ，$E_A\otimes I, I\otimes E_B$ である．

証明 $A\hat{\otimes}I$ が対称演算子であることは明らか．任意の $\Psi\in$ H, $\Phi\in$ K に対して，$\Psi'_\pm=(A\pm i)^{-1}\Psi$ とおけば，$\Psi'_\pm\otimes\Phi\in$ D$(A)\hat{\otimes}$K であり，$(A\hat{\otimes}I\pm i)\Psi'_\pm\otimes\Phi=\Psi\otimes\Phi$．したがって，R$(A\hat{\otimes}I\pm i)$ は稠密であるので，$A\hat{\otimes}I$ は本質的に自己共役である．ゆえに，$A\otimes I$ は自己共役である．

$\{E_A(J)\otimes I|J\in\mathbf{B}^1\}$ は射影演算子の族であり，1 次元スペクトル測度の性質のうち (E.1), (E.3)（2 章 2.7.1 項を参照）をみたすこと，および $J_n\in\mathbf{B}^1, J_n\cap J_m=\emptyset, j\neq m,$ ならば，任意の $J\in\mathbf{B}^1$ に対して，

$$E_A(J)\otimes I-\sum_{n=1}^{N}E_A(J_n)\otimes I=E_A(J\setminus\cup_{n=1}^{N}J_n)\otimes I \qquad (4.39)$$

が成立することを示すのは容易である（まず，H$\hat{\otimes}$K 上で成立することを示し，これが H $\otimes$ K で稠密であることを用いて，極限移行すればよい）．(4.39) と命題 4.13 によって，

$$\left\|E_A(J)\otimes I-\sum_{n=1}^{N}E_A(J_n)\otimes I\right\|\leq 1. \qquad (4.40)$$

$E_A\otimes I$ の完全加法性（性質 (E.2)）を示すために，$J=\cup_{n=1}^{\infty}, J_n\cap J_m=\emptyset, j\neq m, J_n\in\mathbf{B}^1,$ としよう．Ψ を H$\otimes$K の勝手なベクトルとするとき，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\|\Psi_\varepsilon-\Psi\|<\varepsilon$ をみたす $\Psi_\varepsilon\in$ H$\hat{\otimes}$K が存在する．これに対して，番号 N_0 があって，$N\geq N_0$ ならば，$\|E_A(J)\otimes I\Psi_\varepsilon-\sum_{n=1}^{N}E_A(J_n)\otimes I\Psi_\varepsilon\|<\varepsilon$（$\text{s-}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}E_A(J_n)=E_A(J)$ による）．したがって，(4.40) を使って，$N\geq N_0$

ならば，

$$\begin{aligned}&\left\|E_A(J)\otimes I\Psi-\sum_{n=1}^N E_A(J_n)\otimes I\Psi\right\|\\&\le\left\|(E_A(J)\otimes I-\sum_{n=1}^N E_A(J_n)\otimes I)(\Psi-\Psi_\varepsilon)\right\|\\&\quad+\left\|E_A(J)\otimes I\Psi_\varepsilon-\sum_{n=1}^N E_A(J_n)\otimes I\Psi_\varepsilon\right\|\\&\le 2\varepsilon.\end{aligned}$$

したがって，$\lim_{N\to\infty}\|E_A(J)\otimes I\Psi-\sum_{n=1}^N E_A(J_n)\otimes I\Psi\|=0$. 以上から，$E_A\otimes I$ はスペクトル測度であることがわかった．

そこで，$A'=\int_{\mathbf{R}}\lambda d(E_A\otimes I)(\lambda)$ とすれば，これは $\mathsf{H}\otimes\mathsf{K}$ 上の自己共役演算子である．他方，任意の $\Psi\in\mathsf{H}\widehat{\otimes}\mathsf{K},\Phi\in\mathsf{D}(A)\widehat{\otimes}\mathsf{K}$ に対して，

$$\int_{\mathbf{R}}\lambda^2 d\langle\Phi,(E_A\otimes I)(\lambda)\Phi\rangle\ (=\|A\widehat{\otimes}I\Phi\|^2)<\infty,$$

$$\langle\Psi,A\widehat{\otimes}I\Phi\rangle=\int_{\mathbf{R}}\lambda d\langle\Psi,(E_A\otimes I)(\lambda)\Phi\rangle.$$

これから，$A\widehat{\otimes}I\subset A'$ がわかる．すでに示したように，$A\widehat{\otimes}I$ は本質的に自己共役であるから，$A\otimes I=A'$ でなければならない．B についても全く同様である．

命題 4.13 の (4.36) によって，任意の $J,K\in\mathbf{B}^1$ に対して，$E_A(J)\otimes I$ と $I\otimes E_B(K)$ は可換である．したがって，$A\otimes I$ と $I\otimes B$ は強可換である． □

補題 4.15 S,T を H 上の強可換な自己共役演算子とする．このとき，次の (i), (ii) が成立する：

(i) S と T は $\mathsf{D}(ST)\cap\mathsf{D}(TS)$ 上で可換であり，$(ST+TS)/2$ は本質的に自己共役である．

(ii) $S+T$ は本質的に自己共役である．もし，S,T が下に有界で $S\ge a,T\ge b$（$a,b\in\mathbf{R}$）ならば，$S+T$ は自己共役であり，$S+T\ge a+b$.

証明 (i) E_S,E_T を，それぞれ，S,T のスペクトル測度とする．仮定により，

直積スペクトル測度 $E := E_S \otimes E_T$ が存在し，

$$S = \int_{\mathbf{R}^2} \lambda dE(\lambda, \mu), \quad T = \int_{\mathbf{R}^2} \mu dE(\lambda, \mu),$$

と表わされる．

$$\mathsf{D} = \mathcal{L}\{E_S((-n, n])E_T((-m, m])\Psi | \Psi \in \mathsf{H}, m, n \geq 1\}$$

とすれば，D は稠密である．演算子解析により，ベクトル $\Psi \in \mathsf{H}$ について，$\Psi \in \mathsf{D}(TS) \cap \mathsf{D}(ST)$ であることと

$$\int_{\mathbf{R}^2} \lambda^2 d\langle \Psi, E(\lambda, \mu)\Psi\rangle < \infty, \int_{\mathbf{R}^2} \mu^2 d\langle \Psi, E(\lambda, \mu)\Psi\rangle < \infty,$$
$$\int_{\mathbf{R}^2} \lambda^2\mu^2 d\langle \Psi, E(\lambda, \mu)\Psi\rangle < \infty,$$

であることは同値である．D の任意の元はこれらの条件をみたす．したがって，$\mathsf{D} \subset \mathsf{D}(ST) \cap \mathsf{D}(TS)$*11．したがって，$\mathsf{D}(TS) \cap \mathsf{D}(ST)$ は稠密である．定理 3.15 によって，S, T は $\mathsf{D}(TS) \cap \mathsf{D}(ST)$ 上で可換である．ゆえに，

$$C := (ST + TS)/2 = (ST) \restriction [\mathsf{D}(ST) \cap \mathsf{D}(TS)] = (TS) \restriction [\mathsf{D}(ST) \cap \mathsf{D}(TS)]$$

は対称演算子である．関数 $(\lambda, \mu) \to (\lambda\mu \pm i)^{-1}$ は有界であるから，

$$K_\pm := \int_{\mathbf{R}^2} (\lambda\mu \pm i)^{-1} dE(\lambda, \mu)$$

は有界演算子である．任意の $\Psi \in \mathsf{D}(ST) \cap \mathsf{D}(TS)$ に対して，$\Phi_\pm := K_\pm\Psi$ は $\mathsf{D}(ST) \cap \mathsf{D}(TS)$ の元であり，$(C \pm i)\Phi_\pm = \Psi$ が成り立つ．これは，$\mathsf{R}(C \pm i)$ が稠密であることを意味する．したがって，C は本質的に自己共役である．

(ii) 任意の $\Psi \in \mathsf{D}(S) \cap \mathsf{D}(T)$ に対して，

$$\Phi_\pm = \left(\int_{\mathbf{R}^2} (\lambda + \mu \pm i)^{-1} dE(\lambda, \mu)\right)\Psi$$

---

*11 実際には，もっと強く，任意の自然数 k, j に対して，$\mathsf{D} \subset \mathsf{D}(S^jT^k) \cap \mathsf{D}(T^kS^j)$ が成立している．

とおけば，$\Phi_\pm \in \mathsf{D}(S+T)[=\mathsf{D}(S)\cap\mathsf{D}(T)]$ であり，$(S+T\pm i)\Phi_\pm = \Psi$ が成立する．したがって，$\mathsf{R}(S+T\pm i)$ は稠密であるから，$S+T$ は本質的に自己共役である．

$S\geq a, T\geq b$ としよう．このとき，$\mathrm{supp}\ E\subset[a,\infty)\times[b,\infty)$．任意の $\Psi\in\mathsf{H}$ に対して，

$$\eta_\pm = \left(\int_{[a,\infty)\times[b,\infty)}(\lambda+\mu\pm i)^{-1}dE(\lambda,\mu)\right)\Psi$$

とおくと，

$$\int_{[a,\infty)\times[b,\infty)}\lambda^2 d\langle\eta_\pm, E(\lambda,\mu)\eta_\pm\rangle = \int_{[a,\infty)\times[b,\infty)}\frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2+1}d\langle\Psi, E(\lambda,\mu)\Psi\rangle$$

であるが，

$$\sup_{\lambda\geq a,\mu\geq b}\frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2+1}<\infty$$

であるので，$\eta_\pm\in\mathsf{D}(S)$．同様にして，$\eta_\pm\in\mathsf{D}(T)$．さらに，

$$(S+T\pm i)\eta_\pm = \Psi$$

が成立することもわかる．これは，$\mathsf{R}(S+T\pm i)=\mathsf{H}$ を意味するから，$S+T$ は自己共役である．$S+T\geq a+b$ は明らかであろう． □

A, B を，それぞれ，H, K 上の自己共役演算子としよう．命題 4.13 と補題 4.14 および定理 2.67 によって，2 次元のスペクトル測度 $E_{A,B}$ で

$$E_{A,B}(J\times K) = E_A(J)\otimes E_B(K),\quad J,K\in\mathbf{B}^1, \tag{4.41}$$

となるものがただひとつ存在する．この場合，

$$A\otimes I = \int_{\mathbb{R}^2}\lambda dE_{A,B}(\lambda,\mu),\quad I\otimes B = \int_{\mathbb{R}^2}\mu dE_{A,B}(\lambda,\mu), \tag{4.42}$$

である．

定理 4.16 A, B を，それぞれ，H, K 上の自己共役演算子とする．このとき，次の (i), (ii) が成立する：

(i) $A \otimes B$ は自己共役である．さらに，

$$A \otimes B = \overline{\frac{(A \otimes I)(I \otimes B) + (I \otimes B)(A \otimes I)}{2}}$$

が成立する．

(ii) $A \otimes I + I \otimes B$ は本質的に自己共役である．もし，A, B がともに下に有界で，$A \geq a, B \geq b$ ならば，$A \otimes I + I \otimes B$ は自己共役であり，$A \otimes I + I \otimes B \geq a + b$ が成り立つ．

証明 (i) A, B の対称性から，$A \hat{\otimes} B$ は対称である．したがって，その閉包である $A \otimes B$ も対称である．関数 $(\lambda, \mu) \to (\lambda\mu \pm i)^{-1}$ は有界であるから，

$$C_{\pm} := \int_{\mathbf{R}^2} (\lambda\mu \pm i)^{-1} dE_{A,B}(\lambda, \mu)$$

は有界演算子である．$\Psi \in \mathsf{D}(A), \Phi \in \mathsf{D}(B)$ に対して，$\theta_{\pm} = C_{\pm}\Psi \otimes \Phi$ とおけば，

$$\theta_{\pm} = \int_{\mathbf{R}^2} (\lambda\mu \pm i)^{-1} dE_A(\lambda)\Psi \otimes dE_B(\mu)\Phi.$$

ただし，右辺は強極限の意味における，$\mathsf{H} \otimes \mathsf{K}$-値のスティルチェス積分である．このスティルチェス積分の近似和は $\mathsf{D}(A)\hat{\otimes}\mathsf{D}(B)$ の元であり，これに $A \otimes B$ を作用させて得られるベクトルは，

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^2} (\lambda\mu \pm i)^{-1} dE_A(\lambda)A\Psi \otimes dE_B(\mu)B\Phi \\
&= \left(\int_{\mathbf{R}^2} (\lambda\mu \pm i)^{-1} dE_{A,B}(\lambda, \mu)\right) A\Psi \otimes B\Phi \\
&= \left(\int_{\mathbf{R}^2} \lambda\mu(\lambda\mu \pm i)^{-1} dE_{A,B}(\lambda, \mu)\right) \Psi \otimes \Phi
\end{aligned}$$

に収束する．ここで，最後の等号は演算子解析による．したがって，$\theta_{\pm} \in \mathsf{D}(A \otimes B)$ であり，

$$A \otimes B\theta_{\pm} = \left(\int_{\mathbf{R}^2} \lambda\mu(\lambda\mu \pm i)^{-1} dE_{A,B}(\lambda, \mu)\right) \Psi \otimes \Phi.$$

ゆえに，$(A \otimes B \pm i)\theta_{\pm} = \Psi \otimes \Phi$．これは，$\mathsf{R}(A \otimes B \pm i) \supset \mathsf{D}(A)\hat{\otimes}\mathsf{D}(B)$ を意味するから，$\mathsf{R}(A \otimes B \pm i)$ は稠密である．したがって，$A \otimes B$ は本質的に

自己共役である．$A \otimes B$ は，定義によって，閉演算子であるから，$A \otimes B$ は自己共役である．

補題 4.14 と補題 4.15 によって，$[(A\otimes I)(I\otimes B)+(I\otimes B)(A\otimes I)]/2$ は本質的に自己共役である．明らかに，

$$A\hat{\otimes}B \subset \frac{(A\otimes I)(I\otimes B)+(I\otimes B)(A\otimes I)}{2}.$$

したがって，閉包をとり，$A \otimes B$ の自己共役性を使えば，求める演算子の等式が得られる．

(ii) これは補題 4.14 と補題 4.15(ii) による．□

自己共役演算子のテンソル積のスペクトルについて調べるために，次の事実を証明する：

補題 4.17　A, B を，それぞれ，H, K 上の自己共役演算子，$E_{A,B}$ を (4.41) をみたす 2 次元のスペクトル測度とする．このとき，

$$\mathrm{supp}\, E_{A,B} = \mathrm{supp}\, E_A \times \mathrm{supp}\, E_B.$$

証明　$E_{A,B}(\mathrm{supp}\, E_A \times \mathrm{supp}\, E_B) = E_A(\mathrm{supp}\, E_A) \otimes E_B(\mathrm{supp}\, E_B) = I_{\mathsf{H}} \otimes I_{\mathsf{K}} = I_{\mathsf{H}\otimes\mathsf{K}}$ であるから，$\mathrm{supp}\, E_{A,B} \subset \mathrm{supp}\, E_A \times \mathrm{supp}\, E_B$．逆の包含関係を示すために，

$$(\mathrm{supp}\, E_{A,B})^c \subset (\mathrm{supp}\, E_A \times \mathrm{supp}\, E_B)^c$$

を示そう．$(\lambda, \mu) \in (\mathrm{supp}\, E_{A,B})^c$ とする．$(\mathrm{supp}\, E_{A,B})^c$ は $\mathbf{R}^2$ の開集合であるから，ある正数 δ が存在して，$U_\delta := \{(\lambda', \mu') \| \lambda' - \lambda|^2 + |\mu' - \mu|^2 < \delta^2\} \subset (\mathrm{supp}\, E_{A,B})^c$．したがって，$E_{A,B}(U_\delta) = 0$．このとき，$[\lambda - \delta/2, \lambda + \delta/2] \times [\mu - \delta/2, \mu + \delta/2] \subset U_\delta$．したがって，$E_A([\lambda - \delta/2, \lambda + \delta/2]) \otimes E_B([\mu - \delta/2, \mu + \delta/2]) = 0$．これは，$E_A([\lambda - \delta/2, \lambda + \delta/2]) = 0$ または $E_B([\mu - \delta/2, \mu + \delta/2]) = 0$ を意味する．ゆえに，$\lambda \in (\mathrm{supp}\, E_A)^c$ または $\mu \in (\mathrm{supp}\, E_B)^c$．したがって，$(\lambda, \mu) \in (\mathrm{supp}\, E_A \times \mathrm{supp}\, E_B)^c$．□

自己共役演算子のテンソル積のスペクトルは次の定理によってあたえられる：

定理 4.18 A, B を，それぞれ，H, K 上の自己共役演算子とすると次の (i), (ii) が成立する．

(i)

$$\sigma(A \otimes B) = \overline{\{\lambda\mu | \lambda \in \sigma(A), \mu \in \sigma(B)\}}.$$

(ii)

$$\sigma\left(\overline{A \otimes I + I \otimes B}\right) = \overline{\{\lambda + \mu | \lambda \in \sigma(A), \mu \in \sigma(B)\}}.$$

証明 (4.42) によって，

$$A \otimes B = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda\mu \, dE_{A,B}(\lambda, \mu), \tag{4.43}$$

$$\overline{A \otimes I + I \otimes B} = \int_{\mathbb{R}^2} (\lambda + \mu) dE_{A,B}(\lambda, \mu) \tag{4.44}$$

と書ける．他方，任意の自己共役演算子 T に対して，$\sigma(T) = \mathrm{supp}\, E_T$（2 章 2.9.5 項）．この事実と補題 4.17，スペクトル写像定理 [定理 2.84(iii)] を応用すればよい． □

上の諸結果は任意の有限個の自己共役演算子のテンソル積へと拡張される．結果だけをまとめておく（証明は上の場合と全く同様）．

$\mathsf{H}_j, j = 1, \cdots, N$, $(N \geq 2)$ をヒルベルト空間，A_j $(j = 1, \cdots, N)$ を H_j の自己共役演算子とする．自己共役演算子の組 $A = \{A_1, \cdots, A_N\}$ に対して，$\mathsf{H} := \otimes_{j=1}^N \mathsf{H}_j$ 上の演算子 A_Π を

$$A_\Pi := \otimes_{j=1}^N A_j \tag{4.45}$$

によって定義する．また，

$$\widetilde{A}_j := \underbrace{I \otimes \cdots \otimes I \otimes \overset{j\,\text{番目}}{\overbrace{A_j}} \otimes I \otimes I \cdots \otimes I}_{N\,\text{個}} \tag{4.46a}$$

とし，

$$A_\Sigma := \sum_{j=1}^N \widetilde{A}_j \tag{4.46b}$$

とおく．

定理 4.19 $\mathsf{H}_j, A_j, j = 1, \cdots, N$ $(N \geq 2)$ を上のものとする．このとき，次の (i)〜(v) が成立する：

(i) 各 $\widetilde{A}_j$ は自己共役であり，H 上の自己共役演算子の組 $\{\widetilde{A}_1, \cdots, \widetilde{A}_N\}$ は強可換である．$\widetilde{A}_j$ のスペクトル測度は

$$\widetilde{E}_{A_j} := I \otimes \cdots \otimes I \otimes \underbrace{E_{A_j}}_{j\text{ 番目}} \otimes I \otimes I \cdots \otimes I$$

である．

(ii) A_Π は自己共役であり，$\hat{\otimes}_{j=1}^N \mathsf{D}(A_j)$ 上で本質的に自己共役である．

(iii) A_Σ は本質的に自己共役であり，$\hat{\otimes}_{j=1}^N \mathsf{D}(A_j)$ は A_Σ の芯のひとつである．さらに，各 A_j が下に有界で，$A_j \geq a_j$ $(a_j \in \mathbb{R})$ ならば，A_Σ は自己共役であり，下に有界であって，$A_\Sigma \geq \sum_{j=1}^N a_j$.

(iv)

$$\sigma(A_\Pi) = \overline{\left\{ \prod_{j=1}^N \lambda_j \middle| \lambda_j \in \sigma(A_j), j = 1, \cdots, N \right\}}.$$

(v)

$$\sigma(\bar{A}_\Sigma) = \overline{\left\{ \sum_{j=1}^N \lambda_j \middle| \lambda_j \in \sigma(A_j), j = 1, \cdots, N \right\}}.$$

注意 (iv) において，$A_i = I$, $i \neq j$, という特別な場合（したがって，$A_\Pi = \widetilde{A}_j$）を考えると，$\sigma(\widetilde{A}_j) = \overline{\sigma(A_j)}$ を得る．また，いまの場合，$A_\Sigma = \widetilde{A}_j + (N-1)I$（したがって，$\sigma(\bar{A}_\Sigma) = \overline{\{\lambda + N - 1 | \lambda \in \sigma(\widetilde{A}_j)\}}$）であり，(v) から，$\sigma(\bar{A}_\Sigma) = \overline{\{\lambda + N - 1 | \lambda \in \sigma(A_j)\}}$ であるから，これらの関係からも，$\sigma(\widetilde{A}_j) = \sigma(A_j)$ が導かれる．

量子力学との関連において，次の事実も重要である．

定理 4.20 $\mathsf{H}_j, A_j, j = 1, \cdots, N$ $(N \geq 2)$ を定理 4.19 のものとする．このとき，任意の実数 t に対して，

$$e^{it\bar{A}_\Sigma} = \otimes_{j=1}^N e^{itA_j}. \tag{4.47}$$

証明 (4.41) と同様に，N 次元のスペクトル測度 E で

$$E(K_1 \times \cdots \times K_N) = \otimes_{j=1}^N E_{A_j}(K_j), \quad K_j \in \mathsf{B}^1, j = 1, \cdots, N,$$

をみたすものがただひとつ存在する．この場合，

$$\widetilde{A}_j = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_j dE(\lambda_1, \cdots, \lambda_N), \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned} e^{it\widetilde{A}_j} &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{it\lambda_j} dE(\lambda_1, \cdots, \lambda_N) \\ &= I \otimes \cdots \otimes I \otimes e^{itA_j} \otimes I \otimes \cdots \otimes I, \end{aligned} \tag{4.49}$$

と表わされる．したがって，

$$\bar{A}_\Sigma = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j \right) dE(\lambda_1, \cdots, \lambda_N).$$

そこで，1 次元のボレル集合 $J \in \mathsf{B}^1$ に対して，

$$F(J) = E\left(\left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N \middle| \sum_{j=1}^N \lambda_j \in J \right\} \right) \tag{4.50}$$

とおけば，$\{F(J) | J \in \mathsf{B}^1\}$ は 1 次元のスペクトル測度であり，

$$\bar{A}_\Sigma = \int_{\mathbb{R}} \lambda dF(\lambda) \tag{4.51}$$

と書ける（章末演習問題 4）．ゆえに，演算子解析により，

$$\begin{aligned} e^{it\bar{A}_\Sigma} :&= \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} dF(\lambda) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{it\sum_{j=1}^N \lambda_j} dE(\lambda_1, \cdots, \lambda_N) \\ &= e^{it\widetilde{A}_1} \cdots e^{it\widetilde{A}_N}. \end{aligned}$$

(4.48) と命題 4.13 の一般化によって，最後の式は (4.47) の右辺に等しい． □

4.2.3　物 理 量 の 形

4.1.5 項の公理 QM6 に述べられた多粒子系を考える．すなわち，$\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_N$ をそれぞれ，量子系 $S_1, \cdots, S_N$ の状態のヒルベルト空間として，状態のヒルベルト空間が $\mathsf{H} = \otimes_{j=1}^N \mathsf{H}_j$ によって記述される多粒子系 $S = \Sigma_{j=1}^n S_j$ を考察する．各系 S_j における物理量から系 S における物理量の定義の仕方については次の処方箋が基本となる：

(S.1)　系 S_j における任意の物理量を A_j（H_j 上の自己共役演算子）とすると，これに対応する，系 S での物理量は，**S が非相互作用系の場合には**，(4.45) によって定義される演算子 $\widetilde{A}_j$ によってあたえられる．

(S.2)　物理量 $A_1, \cdots A_N$ が同種の物理量のとき，系 S 全体での同種の物理量は，**S が非相互作用系の場合には**，(4.46) によって定義される演算子 $\bar{A}_\Sigma$ によってあたえられる．

注意　定理 4.19 によって，$\widetilde{A}_j$，$\bar{A}_\Sigma$ はいずれも自己共役である．したがって，物理量たりうる．

例 4.8　$\mathsf{H}_1 = \mathsf{H}_2 = \cdots = \mathsf{H}_N = \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ の場合を考えよう．いまの場合の系 S_j における位置演算子 $(x_{j1}, \cdots, x_{jd})$ の α 成分 $x_{j\alpha}$ $(\alpha = 1, \cdots, d)$ に対応する，系 S での演算子は，上の処方箋 (S.1) にしたがえば，

$$X_{j\alpha} := I \otimes \cdots I \otimes x_{j\alpha} \otimes I \cdots \otimes I$$

となる[*12]．写像 $U : \otimes^N \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d) \to \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})$ を自然な同型対応をあたえるユニタリ変換とすれば（例 4.2），

$$UX_{j\alpha}U^{-1} = x_{j\alpha} \tag{4.52}$$

であることが示される．実際，任意の

$$\Psi = \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_N \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d) \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \mathsf{D}(x_{j\alpha}) \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$$

(つまり，$\psi_j \in \mathsf{D}(x_{j\alpha})$, $\psi_i \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d), i \neq j$) に対して，

$$\begin{aligned} U^{-1}x_{j\alpha}U\Psi &= U^{-1}\psi_1 \times \cdots \times x_{j\alpha}\psi_j \times \cdots \times \psi_N \\ &= X_{j\alpha}\Psi. \end{aligned}$$

[*12] 座標関数 $x_{j\alpha}$ によるかけ算演算子も同じ記号で書く．

一方，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}\mathsf{D}(x_{j\alpha})\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ は $X_{j\alpha}$ の芯であるから（定理 4.19(ii)），第 3 章演習問題 10 を応用すれば，演算子の等式 (4.52) が得られる．

また，系 S_j における運動量演算子を $(-i\hbar D_{j1},\cdots,-i\hbar D_{jd})$ とすれば（$D_{j\alpha}$ は変数 $x_{j\alpha}$ についての一般化された偏微分演算子），その α 成分に対応する，系 S での演算子は，

$$P_{j\alpha} := I\otimes\cdots I\otimes(-i\hbar D_{j\alpha})\otimes I\cdots\otimes I$$

となる．$x_{j\alpha}$ の場合と同様にして，

$$UP_{j\alpha}U^{-1} = -i\hbar D_{j\alpha} \tag{4.53}$$

が示される（章末演習問題 5）．この場合には，$\overline{\sum_{j=1}^N P_{j\alpha}}$ は系 S における全運動量に対応する演算子の α 成分を表わす．

全系 S での相互作用のない場合のハミルトニアンは

$$\widetilde{H_0}^{(N)} := \sum_{j=1}^N\sum_{\alpha=1}^d \frac{P_{j\alpha}^2}{2m_j}$$

であり，

$$U\widetilde{H_0}^{(N)}U^{-1} = H_0^{(N)} \tag{4.54}$$

が成り立つ（章末演習問題 6）（$H_0^{(N)}$ は (3.56) によってあたえられる）．

こうして，この例では，上の処方箋は自然なものであることがわかる．

上の処方箋において注意を要するのは，それが粒子の間に相互作用がない場合のものであるということである．だが，それは相互作用がある場合に，当該の物理量たちを定義するためのひとつの出発点をあたえてくれるという意味で有用である．相互作用がある場合の処方は次のようにしてなされる．いま，系 S のヒルベルト空間が H であたえられるとし，A を相互作用がない場合の系 S における物理量のひとつであるとする（たとえば，$\widetilde{A}_j$ や $\bar{A}_\Sigma$ の形の演算子）．物理量 A が粒子間の相互作用によって形を変える場合，A に対する相互作用の効果の形—これを A に関わる相互作用ということにする—は大きく二種類に分

けることができる．すなわち，(i) それが H 上の演算子で直接表わされる場合と (ii) そうでない場合である．

(i) の場合は，物理量 A に関わる相互作用を表わす演算子を B とすれば，$A+B$ を，相互作用がある場合の，A と同種の物理量の候補と考えるのである．このような演算子 B を A に対する**摂動**という．もちろん，$A+B$ から物理量が定義されるためには，その本質的自己共役性を証明する必要がある．あるいはそれらの適当な自己共役拡大を構成しなければならない（前者の場合はその閉包で，後者の場合は，その自己共役拡大で当該の物理量を定義する）．したがって，特に，B は必然的に対称演算子でなければならない．こうして，相互作用系の物理量を定義し，その性質を論じることから，数学的には，一般のヒルベルト空間上の自己共役演算子に対して対称演算子による摂動を加えたものがいつ（本質的に）自己共役であるかという，興味ある重要な問題へ導かれる．この問題は，量子物理学の数学的理論における基本的な問題のひとつであり，数学的には自己共役演算子に対する（数学的な意味での）摂動論と関わるものである．この側面については，続編『量子物理の数理』で詳しく論じる．

(ii) の場合は，まず，H 上で，A に関わる相互作用を "近似的に" 記述するとみなされる演算子の族 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．この族は，形式的極限 "$\lim_{n\to\infty} B_n$" が，発見法的な意味で，A に関わる本来の相互作用を記述すると予想されるように選ぶ．(i) の場合と同様に，$C_n := A + B_n$ が相互作用がある場合の当該の "近似的な" 物理量を表わすと考えられる．もし，形式的な極限 "$\lim_{n\to\infty} C_n$" が何らかの意味で，H 上の自己共役演算子 C に収束するならば，C をもって当該の物理量の候補とするのである．

他方，もし，形式的な極限 "$\lim_{n\to\infty} C_n$" が H 上の演算子として存在しない場合には，演算子の族 $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ をもとにして，ある種の方法で，$n \to \infty$ に対応すると考えられる理論を，H とは別のヒルベルト空間 H′ 上に構成し，これでもって相互作用のある場合の理論を定義するのである[*13]．CCR の表現という

[*13] この方法は，C* 代数の表現論におけるゲルファント (I. M. Gel'fand)-ナイマルク (M. A. Naimark) -シーガル (I. E. Segal) の構成法—**GNS 構成法**—として知られるものである．参照：江沢　洋・新井朝雄『場の量子論と統計力学』(日本評論社，1988)，ボゴリューボフ他『場の量子論の数学的方法』(江沢　洋他訳，東京図書，1972)．

観点から言えば，これは，CCR の表現空間が変化することに対応する．このような状況は場の量子論の種々のモデルの厳密な構成において現われ，多くの場合，H における CCR の表現（無限自由度）と H' における CCR の表現はユニタリ同値にならない．

例 4.9　(3.55) によって定義される，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})$ 上のシュレーディンガー演算子 H_S は，$\otimes^N \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ においてはどのように表示されるであろうか．非相互作用部分 $H_0^{(N)}$ については，例 4.7 で見た．そこで，相互作用を記述するポテンシャル V によるかけ算演算子が $\otimes^N \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上ではどのような形をとるかを調べればよい．定理 4.19(i) によって，自己共役演算子の組 $\{X_{j\alpha}|j=1,\cdots,N,\ \alpha=1,\cdots,d\}$ は強可換である．したがって，

$$X_j := (X_{j1},\cdots,X_{jd})$$

とおけば，演算子解析により，$\otimes_{j=1}^N \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上の自己共役演算子 $V(X_1,\cdots,X_N)$ が定義される．(4.52) と補題 3.27 によって，

$$UV(X_1,\cdots,X_N)U^{-1} = V$$

が成立することになる．したがって，ポテンシャル V による，N 個の粒子の相互作用は，N 重テンソル積 $\otimes^N \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上では，$V(X_1,\cdots,\cdots,X_N)$ によって記述される．ゆえに，この例では，相互作用も，非相互作用系の状態のヒルベルト空間 $\otimes^N \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上で定義される．

4.2.4　ハミルトニアン

系 S_j のハミルトニアンを H_j, $j=1,\cdots,N$, とする．このとき，前項の処方 (S.2) によれば，$S=\sum_{j=1}^N S_j$ が非相互作用系の場合，状態のヒルベルト空間を $\mathsf{H}=\otimes_{j=1}^N \mathsf{H}_j$ にとることができ，ハミルトニアン H は

$$H = \bar{H}_\Sigma = \overline{\sum_{j=1}^N \widetilde{H}_j} \tag{4.55}$$

であたえられる．ただし，

$$\widetilde{H}_j := I\otimes\cdots\otimes I\otimes \overbrace{H_j}^{j\text{ 番目}} \otimes I\cdots\otimes I. \tag{4.56}$$

自己共役演算子 H を**無摂動ハミルトニアン** (unperturbed Hamiltonian) という．このハミルトニアンが生成するユニタリ変換 $e^{-itH/\hbar}$ $(t \in \mathbb{R})$ は非相互作用系の時間発展を記述する．定理 4.20 を，$A_j = -H_j/\hbar$ として，応用すれば，次の定理を得る：

定理 4.21　任意の時刻 t に対して，

$$e^{-itH/\hbar} = \otimes_{j=1}^N e^{-itH_j/\hbar}$$

が成立する．

こうして，非相互作用系の時間発展演算子は，これを構成するそれぞれの量子系の時間発展演算子のテンソル積であたえられるという簡単な構造をしていることがわかる．

例 4.10　例 4.8 で，系 S_j における粒子（質量 $m_j > 0$）は，ボレル可測関数 $V_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ で記述されるポテンシャルの中を運動しているとしよう．この場合，系 S_j のハミルトニアンは

$$H_{V_j} := -\frac{\hbar^2}{2m_j}\Delta_{x_j} + V_j$$

によってあたえられる．H_{V_j} は本質的に自己共役であると仮定しよう．この場合，$\bar{H}_{V_j}$ が系 S_j のハミルトニアンとして定義される．公理 QM6 によって，このような粒子 N 個からなる非相互作用系の状態のヒルベルト空間として，$\otimes^N \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ をとることができ，そのハミルトニアンは

$$H(V_1, \cdots, V_N) := \overline{\sum_{j=1}^N I \otimes \cdots \otimes I \otimes \bar{H}_{V_j} \otimes I \cdots \otimes I}$$

によってあたえられる．したがって，定理 4.21 によって，

$$e^{-itH(V_1,\cdots,V_N)/\hbar} = \otimes_{j=1}^N e^{-itH_{V_j}/\hbar}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

N 重テンソル積 $\otimes^N \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ と $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^{dN})$ の間の自然な同型対応のもとで，$H(V_1, \cdots, V_N)$ は

$$H^{(N)} := \overline{\sum_{j=1}^N \left(-\frac{\hbar^2}{2m_j}\Delta + V_j(x_j)\right)}$$

とユニタリ同値になる（例 4.8 を参照）．したがって，定理 4.19(v) によって，

$$\sigma(H^{(N)}) = \sigma(H(V_1, \cdots, V_N)) = \overline{\left\{ \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \middle| \lambda_j \in \sigma(\bar{H}_{V_j}) \right\}}.$$

こうして，テンソル積の理論を使うことにより，$\sigma(\bar{H}_{V_j})$ がわかれば，$H^{(N)}$ のスペクトルをただちに求めることができる．これは演算子のテンソル積の概念の有効性を示している．

系 S が相互作用系の場合にも，ハミルトニアンが H 上の自己共役演算子 $\hat{H}$ によって表わされるとすれば，

$$H_I := \hat{H} - H$$

が，S の部分系としての $S_1, \cdots, S_N$ の間の相互作用を記述する演算子と考えられる．これをハミルトニアン $\hat{H}$ の**相互作用部分**あるいは H に対する**摂動**という．いまの式は

$$\hat{H} = H + H_I$$

と書き直せる．$\mathsf{D}(\hat{H}) \cap \mathsf{D}(H)$ が稠密ならば，H_I は対称である．相互作用部分は物理量と考える必然性はないので，H_I は必ずしも自己共役である必要はない．

例 4.11 例 4.10 において，粒子間に力が働き，その力のポテンシャルが $\mathbb{R}^{dN}$ 上の実数値可測関数 $V(x_1, \cdots, x_N)$ であたえられるとする．このとき，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ の N 重テンソル積 $\otimes^N \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上の演算子 $V(X_1, \cdots, X_N)$ は粒子間の相互作用を記述すると解釈される．したがって，これを相互作用部分とする相互作用系のハミルトニアンは $H(V_1, \cdots, V_N) + V(X_1, \cdots, X_N)$ によってあたえられる．

V の具体的な例をひとつあげておく．$d = 3$ の場合を考え，j 番目の粒子が電荷 q_j をもつとすれば，j 番目と k 番目 $(j \neq k)$ の粒子間には大きさが $|q_j q_k|/|x_j - x_k|^2$ の電気的クーロン力が働く．この力のポテンシャルは $q_j q_k/|x_j - x_k|$ である．したがって，この場合，

$$V(x_1, \cdots, x_N) = \sum_{j<k} \frac{q_j q_k}{|x_j - x_k|}.$$

4.3　無限粒子系とフォック空間

4.3.1　フォック空間

これまでは，有限個の粒子からなり，粒子の個数が変化しないような量子系を議論してきた．エネルギーが高い領域では，素粒子は互いに相互作用することにより，消滅したり，生成したりすることが可能である．この場合，関与するエネルギーが高くなれば，生成する素粒子の数は多くなりうる．このような，素粒子の数が任意に変化する現象を理論的に考察するためには，状態を表わすヒルベルト空間として，いくらでも多くの数の素粒子を記述しうるものを用意する必要がある．いま，素粒子が 1 個存在する状態のヒルベルト空間—**1 粒子状態の空間**—を H とする．4.1 節の考察から，この素粒子が任意個存在する状態を記述するヒルベルト空間の候補として，H の n 重テンソル積 $\otimes^n\mathsf{H}$ の無限直和

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathsf{H}) &:= \bigoplus_{n=0}^{\infty}\otimes^n\mathsf{H}\\ &= \Big\{\Psi=\{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}\Big|\Psi^{(n)}\in\otimes^n\mathsf{H},\ n\geq 0,\\ &\qquad\qquad \|\Psi\|^2 := \sum_{n=0}^{\infty}\|\Psi^{(n)}\|^2_{\otimes^n\mathsf{H}}<\infty\Big\}\end{aligned} \tag{4.57}$$

を考えるのは自然である[*14]．ただし，$\otimes^0\mathsf{H}:=\mathbb{C}$ と規約する．ヒルベルト空間 $\mathcal{F}(\mathsf{H})$ を H 上の**全フォック空間** (full Fock space) という．

不可弁別性の原理を考慮する場合は，$\otimes^n\mathsf{H}$ は n 重対称テンソル積 $\otimes_s^n\mathsf{H}$ あるいは n 重反対称テンソル $\otimes_{\mathrm{as}}^n\mathsf{H}$ で置き換えられなければならない．したがって，この場合，次の二つの無限直和が考えられる：

$$\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(\mathsf{H}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty}\otimes_{\mathrm{s}}^n\mathsf{H},\qquad \mathcal{F}_{\mathrm{as}}(\mathsf{H}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty}\otimes_{\mathrm{as}}^n\mathsf{H}, \tag{4.58}$$

[*14] 無限直和については，1 章 1.1.8 項を参照．

ここでもまた，$\otimes_{\mathrm{s}}^0 \mathsf{H} := \mathbb{C}, \otimes_{\mathrm{as}}^0 \mathsf{H} := \mathbb{C}$ と規約する．$\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(\mathsf{H})$ を H 上の**対称フォック空間** (symmetric Fock space) または**ボソン フォック空間** (boson Fock space), $\mathcal{F}_{\mathrm{as}}(\mathsf{H})$ を H 上の**反対称フォック空間** (anti-symmetric Fock space) または**フェルミオン フォック空間** (fermion Fock space) という．これらの空間は $\mathcal{F}(\mathsf{H})$ の閉部分空間とみなすことができる．

$\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(\mathsf{H})$ （$\mathcal{F}_{\mathrm{as}}(\mathsf{H})$）の閉部分空間としての $\otimes_{\mathrm{s}}^n \mathsf{H}$ （$\otimes_{\mathrm{as}}^n \mathsf{H}$）はボソン（フェルミオン）の ***n* 粒子空間** (n-particle space) とよばれる[*15].

全フォック空間 $\mathcal{F}(\mathsf{H})$ の特別な単位ベクトル

$$\Omega := \{1, 0, 0, \cdots\} \tag{4.59}$$

(i.e., $\Omega^{(0)} := 1, \Omega^{(n)} := 0, n \geq 1$) は**フォック真空** (Fock vacuum) とよばれる．容易にわかるように，

$$\Omega \in \mathcal{F}_{\mathrm{s}}(\mathsf{H}) \cap \mathcal{F}_{\mathrm{as}}(\mathsf{H}). \tag{4.60}$$

素粒子の生成・消滅を記述する量子力学の理論として，**場の量子論** (quantum field theory) とよばれるものがある．これは，粒子的描像で見た場合，本質的に無限粒子系の理論である．フォック空間は，場の量子論を厳密に展開するうえでの基礎となる．

4.3.2 ヒルベルト空間の直和の上で作用する演算子

フォック空間上の演算子を組織的に扱うために，ヒルベルト空間の直和の上で作用する演算子について若干の一般的考察を行う．

N を自然数または可算無限とし，$\mathsf{H}_j,\ j = 1, \cdots, \mathsf{H}_N$ をヒルベルト空間，A_j を H_j 上の演算子とする．このとき，$\mathsf{H}_j, j = 1, \cdots, N,$ の直和 $\bigoplus_{j=1}^N \mathsf{H}_j$ 上の演算子 $\bigoplus_{j=1}^N A_j$ を次のように定義する：

[*15] $\otimes_{\#}^n \mathsf{H}$ ($\# = $ s, as) は，閉部分空間 $\{\{\Psi^{(k)}\}_{k=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_{\#}(\mathsf{H}) | \Psi^{(k)} = 0, k \neq n; \Psi^{(n)} \in \otimes_{\#}^n \mathsf{H}\}$ と自然な仕方で同一視される．

$$\mathsf{D}\left(\bigoplus_{j=1}^{N} A_n\right) := \left\{\Psi = \{\Psi_j\}_{j=1}^{N} \in \bigoplus_{j=1}^{N} \mathsf{H}_j \middle| \Psi_j \in \mathsf{D}(A_j),\ n \geq 1,\right.$$
$$\left.\sum_{j=1}^{N} \|A_j\Psi_j\|_{\mathsf{H}_j}^2 < \infty\right\}, \quad (4.61\text{a})$$

$$\left(\bigoplus_{j=1}^{N} A_j\right)\Psi := \{A_j\Psi_j\}_{j=1}^{N},\ \Psi \in \mathsf{D}\left(\bigoplus_{j=1}^{N} A_j\right). \quad (4.61\text{b})$$

(4.61a) の右辺の条件の中のひとつ $\sum_{j=1}^{N} \|A_j\Psi_j\|_{\mathsf{H}_j}^2 < \infty$ はもちろん，$N = \infty$ の場合だけ自明でない条件である．これらの演算子に関して，次の定理が成立する．

定理 4.22 $N \leq \infty$ とし，$A = \bigoplus_{j=1}^{N} A_j$ とおく．

(i) 各 A_j が閉演算子ならば，A は閉である．

(ii) 各 $\mathsf{D}(A_j)$ が稠密ならば，$\mathsf{D}(A)$ は稠密であり，$A^* = \bigoplus_{j=1}^{N} A_j^*$ が成り立つ．

(iii) $\|A_j\| \leq 1,\ j \geq 1,$ ならば，A は有界であり，$\|A\| \leq 1$ が成立する．

(iv) 各 A_j がユニタリならば，A はユニタリである．

(v) 各 A_j が自己共役ならば，A は自己共役であり，$\bigoplus_{j=1}^{N} \mathsf{D}(A_j)$ [$N = \infty$ の場合は，$\mathsf{D}(A_j)$ の不完全無限直和 $\widehat{\bigoplus}_{j=1}^{N} \mathsf{D}(A_j)$] 上で本質的に自己共役である．さらに，任意の実数 t に対して，$e^{itA} = \bigoplus_{j=1}^{N} e^{itA_j}$ が成り立つ．

(vi) 各 A_j が射影演算子ならば，A は射影演算子である．

(vii)

$$\sigma_{\mathrm{p}}(A) = \cup_{j=1}^{N} \sigma_{\mathrm{p}}(A_j).$$

(viii) $N < \infty$ ならば，

$$\sigma(A) = \cup_{j=1}^{N} \sigma(A_j). \quad (4.62\text{a})$$

各 A_j が自己共役ならば，

$$\sigma(A) = \overline{\cup_{j=1}^{\infty} \sigma(A_j)}. \quad (4.62\text{b})$$

証明 $N=\infty$ の場合を証明する．$N<\infty$ の場合も同様である（少し容易）．証明を通して，$\mathsf{H}=\bigoplus_{j=1}^{\infty}\mathsf{H}_j$ とおく．

(i) $\Psi_n \in \mathsf{D}(A), \Psi_n \to \Psi \in \mathsf{H}$, $A\Psi_n \to \Phi \in \mathsf{H}$ $(n\to\infty)$ としよう．このとき，$\Psi_n=\{\Psi_{nj}\}_{j=1}^{\infty}$ とすれば，各 $j\geq 1$ に対して，$\Psi_{nj}\to\Psi_j, A_j\Psi_{nj}\to\Phi_j$ $(n\to\infty)$．A_j は閉であるから，$\Psi_j\in\mathsf{D}(A_j)$ かつ $A_j\Psi_j=\Phi_j$．$\sum_{j=1}^{\infty}\|A_j\Psi_j\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}\|\Phi_j\|^2<\infty$ であるから，$\Psi\in\mathsf{D}(A)$ かつ $A\Psi=\Phi$．ゆえに，A は閉である．

(ii) $\mathsf{D}(A)$ は，$\mathsf{D}(A_j), j\geq 1,$ の不完全直和を含むので，定理 1.25(ii) によって，稠密である．任意の $\Psi\in\mathsf{D}(A)$ と $\Phi\in\mathsf{D}(\bigoplus_{j=1}^{\infty}A_j^*)$ に対して，

$$\langle\Phi,A\Psi\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}\langle\Phi_j,A_j\Psi_j\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}\langle A_j^*\Phi_j,\Psi_j\rangle=\left\langle\left(\bigoplus_{j=1}^{\infty}A_j^*\right)\Phi,\Psi\right\rangle.$$

したがって，$\Phi\in\mathsf{D}(A^*)$ かつ $A^*\Phi=(\bigoplus_{j=1}^{\infty}A_j^*)\Phi$．これは，$\bigoplus_{j=1}^{\infty}A_j^*\subset A^*$ を意味する．逆の関係を示すために，$\Phi\in\mathsf{D}(A^*)$ としよう．このとき，任意の $\Psi\in\mathsf{D}(A)$ に対して，

$$\langle A^*\Phi,\Psi\rangle=\langle\Phi,A\Psi\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}\langle\Phi_j,A_j\Psi_j\rangle.$$

Ψ として，j 番目の成分だけが 0 でないものをとれば，

$$\langle(A^*\Phi)_j,\Psi_j\rangle=\langle\Phi_j,A_j\Psi_j\rangle.$$

これがすべての $\Psi_j\in\mathsf{D}(A_j)$ に対して成り立つから，$\Phi_j\in\mathsf{D}(A_j^*)$ かつ $A_j^*\Phi_j=(A^*\Psi)_j$．さらに，$\sum_{j=1}^{\infty}\|A_j^*\Phi_j\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}\|(A^*\Psi)_j\|^2<\infty$．したがって，$\Phi\in\mathsf{D}(\bigoplus_{j=1}^{\infty}A_j^*)$．ゆえに，求める結果を得る．

(iii) 仮定から，任意の $\Psi\in\bigoplus_{j=1}^{\infty}\mathsf{H}_j$ に対して，

$$\sum_{j=1}^{\infty}\|A_j\Psi_j\|^2\leq\sum_{j=1}^{\infty}\|\Psi_j\|^2=\|\Psi\|^2.$$

これから題意がしたがう．

(iv) $\|A_j\| = 1$ であるから，(iii) によって，A は有界である．容易にわかるように，

$$A^*A = \bigoplus_{j=1}^{\infty} A_j^* A_j = \bigoplus_{j=1}^{\infty} I_{\mathsf{H}_j} = I.$$

同様に，$AA^* = I$ が示される．

(v) A の自己共役性は (ii) から明らか．$\mathsf{D}(A_j), j \geq 1,$ の不完全直和を $\mathsf{D}_0 = \widehat{\bigoplus}_{j=1}^{\infty} \mathsf{D}(A_j)$ とおく．任意の $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ に対して，

$$\Psi(N) = \{\Psi_1, \cdots, \Psi_N, 0, 0, \cdots\}$$

とすれば，$\Psi(N) \in \mathsf{D}_0$ であり，$\Psi(N) \to \Psi, A\Psi(N) \to A\Psi\ (N \to \infty)$ が成立する．したがって，$A \subset \overline{A \restriction \mathsf{D}_0}$．$A$ は自己共役であるから，$A = \overline{A \restriction \mathsf{D}_0}$ でなければならない．ゆえに，A は D_0 上で本質的に自己共役である．

$U(t) = \bigoplus_{j=1}^{\infty} e^{itA_j}$ とおけば，(iv) により，$U(t)$ はユニタリである．また，$U(t+s) = U(t)U(s), s, t \in \mathbb{R},$ も容易にわかる．さらに，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\|U(t)\Psi - \Psi\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|e^{itA_j}\Psi_j - \Psi_j\|^2$$

であり，$\|e^{itA_j}\Psi_j - \Psi_j\|^2 \to 0\ (t \to 0)$，$\|e^{itA_j}\Psi_j - \Psi_j\|^2 \leq 4\|\Psi_j\|^2$ であるから，優級数定理によって，上式の右辺は，$t \to 0$ のとき，0 に収束する．以上から，$\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ は強連続 1 パラメーターユニタリ群であることがわかる．したがって，ストーンの定理により，$U(t) = e^{itB}$ となる自己共役演算子 B がただひとつ存在する．$B = A$ を示せば，証明が完結する．$\mathsf{D}(A)$ の任意の元 $\Psi = \{\Psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ をとる．このとき，定理 3.37(i) によって，$A_j\Psi_j = -i\lim_{t \to 0}(e^{itA_j} - 1)\Psi_j/t$．一方，

$$\left\| \frac{(e^{itB} - 1)\Psi}{t} - iA\Psi \right\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \frac{(e^{itA_j} - 1)\Psi_j}{t} - iA_j\Psi_j \right\|^2.$$

演算子解析により，

$$\left\| \frac{(e^{itA_j} - 1)\Psi_j}{t} - iA_j\Psi_j \right\|^2 \leq 4\|A_j\Psi_j\|^2.$$

$\sum_{j=1}^{\infty}\|A_j\Psi_j\|^2<\infty$ であるから，優級数定理により，

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{(e^{itB}-1)\Psi}{t}-iA\Psi\right\|^2=0.$$

したがって，$\Psi\in\mathsf{D}(B)$ であり，$B\Psi=A\Psi$．ゆえに，$A\subset B$．A,B ともに自己共役であるから，$A=B$ でなければならない．

(vi) A の自己共役性と有界性は (v), (iii) による．また，

$$A^2=\bigoplus_{j=1}^{\infty}A_j^2=\bigoplus_{j=1}^{\infty}A_j=A.$$

したがって，A は射影演算子である． □

(vii) $\lambda\in\sigma_{\rm p}(A)$ ならば，$A\Psi=\lambda\Psi$ をみたす $\Psi\in\mathsf{D}(A),\Psi\neq 0$ がある．$\Psi\neq 0$ であるから，$\Psi_j\neq 0$ となる番号 j が存在し，$A_j\Psi_j=\lambda\Psi_j$ が成立する．したがって，$\lambda\in\sigma_{\rm p}(A_j)$．ゆえに，$\sigma_{\rm p}(A)\subset\cup_{j=1}^{\infty}\sigma_{\rm p}(A_j)\cdots(*)$．逆に，ある j に対して，$\lambda\in\sigma_{\rm p}(A_j)$ とすれば，$A_j\Psi_j=\lambda\Psi_j$ をみたす $\Psi_j\in\mathsf{D}(A_j)$, $\Psi_j\neq 0$ がある．そこで，$\Phi\in\mathsf{H}$ を $\Phi_k=\delta_{jk}\Psi_j$ によって定義すれば，$\Phi\in\mathsf{D}(A)$, $\Phi\neq 0$ であり，$A\Phi=\lambda\Phi$ が成り立つ．したがって，$\lambda\in\sigma_{\rm p}(A)$．ゆえに，$(*)$ の逆の包含関係が示される．こうして，求める結果を得る．

(viii) (4.62a) の証明は命題 2.59(v), (2.111) の証明と同様なので省略する．

(4.62b) を証明しよう．そこで，A は自己共役とする．まず，$\lambda\in\varrho(A)$ とする．このとき，$A-\lambda$ は全単射である．任意の $\Phi_j\in\mathsf{H}_j$ に対して，$\widetilde{\Phi}\in\mathsf{H}$ を $\widetilde{\Phi}_k=\delta_{kj}\Phi_j$ によって定義すれば，$A-\lambda$ の全射性により，$(A-\lambda)\Psi=\widetilde{\Phi}$ をみたす $\Psi\in\mathsf{D}(A)$ がある．これは，$(A_j-\lambda)\Psi_j=\Phi_j$, $(A_k-\lambda)\Psi_k=0$, $k\neq j$ を意味する．したがって，$A_j-\lambda$ は全射である．また，$\eta\in\ker(A_j-\lambda)$ とし，$\eta\in\mathsf{D}(A)$ を $\widetilde{\eta}_k=\delta_{jk}\eta$ によって定義すれば，$(A-\lambda)\widetilde{\eta}=0$ であるから，$A-\lambda$ の単射性により，$\widetilde{\eta}=0$．これは $\eta=0$ を意味する．したがって，$A_j-\lambda$ は単射である．いまの場合，$A_j-\lambda$ は閉であるから，$\lambda\in\varrho(A_j)$ が結論される．したがって，$\lambda\in\cap_{j=1}^{\infty}\varrho(A_j)$．ゆえに，$\varrho(A)\subset\cap_{j=1}^{\infty}\varrho(A_j)$．これは，$\sigma(A)\supset\cup_{j=1}^{\infty}\sigma(A_j)$，したがって，

$$\sigma(A)\supset\overline{\cup_{j=1}^{\infty}\sigma(A_j)} \tag{4.62c}$$

を意味する．

次に，$\lambda \notin \overline{\cup_{j=1}^{\infty}\sigma(A_j)}$ とする．このとき，定数 $\delta > 0$ があって，すべての $j \geq 1$ に対して

$$\inf_{\mu\in\sigma(A_j)} |\lambda - \mu| \geq \delta$$

が成立する．したがって，スペクトル表示を使うことにより，

$$\|(A_j - \lambda)^{-1}\| \leq \delta^{-1}.$$

任意の $\Phi \in \mathsf{H}$ に対して，$\Psi_j := (A_j - \lambda)^{-1}\Phi_j$ とおけば，$\Psi_j \in \mathsf{D}(A_j)$ であり，

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\Psi_j\|^2 \leq \delta^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} \|\Phi_j\|^2 < \infty.$$

したがって，$\Psi := \{\Psi_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathsf{H}$．また，

$$A_j\Psi_j = \Phi_j + \lambda(A_j - \lambda)^{-1}\Phi_j$$

と変形すれば，$\sum_{j=1}^{\infty} \|A_j\Psi_j\|^2 < \infty$ がわかる．ゆえに，$\Psi \in \mathsf{D}(A)$ であり，$(A - \lambda)\Psi = \Phi$ が成り立つ．これは，$A - \lambda$ が全射であることを意味する．

ベクトル $\Xi \in \mathsf{D}(A)$ が $(A-\lambda)\Xi = 0$ をみたすならば，$(A_j-\lambda)\Xi_j = 0$, $j \geq 1$．したがって，$A_j - \lambda$ の単射性により，$\Xi_j = 0$, $j \geq 0$．これは $\Xi = 0$ を意味する．したがって，$A - \lambda$ は単射である．以上から，$\lambda \in \varrho(A)$ であることがわかる．ゆえに，$(\overline{\cup_{j=1}^{\infty}\sigma(A_j)})^c \subset \varrho(A)$ が示されたことになる．これは，$\sigma(A) \subset \overline{\cup_{j=1}^{\infty}\sigma(A_j)}$ と同値である．これと (4.62c) をあわせれば (4.62b) が得られる． □

注意 上の証明からわかるように，包含関係 (4.62c) は A_j が一般の線形演算子である場合にも成り立つ [(4.62c) の証明には自己共役性は使われていないことに注意．また，A_j の閉性も実は使う必要がない]．

4.3.3 フォック空間における物理量

フォック空間 $\mathcal{F}(\mathsf{H})$ 上の演算子を考察しよう．対称化演算子 S_N の無限直和

$$P_{\mathrm{s}} := \bigoplus_{N=0}^{\infty} S_N \tag{4.63}$$

（$S_0 := 1$）は，定理 4.22(vi) によって，$\mathcal{F}(\mathsf{H})$ 上の射影演算子である．容易にわかるように，

$$\mathsf{R}(P_{\rm s}) = \mathcal{F}_{\rm s}(\mathsf{H}) \tag{4.64}$$

が成り立つ．同様に，反対称化演算子 A_N の無限直和

$$P_{\rm as} := \bigoplus_{N=0}^{\infty} A_N \tag{4.65}$$

（$A_0 := 1$）も $\mathcal{F}(\mathsf{H})$ 上の射影演算子であり，

$$\mathsf{R}(P_{\rm as}) = \mathcal{F}_{\rm as}(\mathsf{H}) \tag{4.66}$$

が成立する．こうして，対称化演算子あるいは反対称化演算子からつくられる射影演算子を用いて，ボソン フォック空間とフェルミオン フォック空間の特徴づけがなされる．

A を 1 粒子系の物理量，すなわち，H 上の自己共役演算子としよう．この粒子が n 個集まってできる多粒子系で相互作用のないものを考える．このとき，不可弁別性の原理を考慮しないとすれば，公理 QM6 によって，そのような多粒子系の状態のヒルベルト空間として $\otimes^n\mathsf{H}$ をとることができ，この多粒子系における，A と同種の物理量は，4.2.3 項の処方により，

$$A_{\Sigma}^{(n)} := \overline{\sum_{j=1}^{n} I\otimes\cdots\otimes I\otimes \overbrace{A}^{j\,\text{番目}} \otimes I\otimes\cdots\otimes I} \tag{4.67}$$

であたえられる．$n=0$ の場合は，

$$A_{\Sigma}^{(0)} := 0 \tag{4.68}$$

と定義する．

補題 4.23 各 $n \geq 0$ に対して，$A_{\Sigma}^{(n)}$ は $\otimes_{\rm s}^n\mathsf{H}$ および $\otimes_{\rm as}^n\mathsf{H}$ によって簡約される[*16]．

[*16] 演算子の簡約の概念については，2 章 2.6.4 項を参照．

証明 $n=0,1$ の場合は自明．$n \geq 2$ とする．$\hat{\otimes}^n \mathsf{D}(A)$ は $A_\Sigma^{(n)}$ の芯であるから，任意の $\Psi \in \mathsf{D}(A_\Sigma^{(n)})$ に対して，

$$\Psi_k \to \Psi, A_\Sigma^{(n)}\Psi_k \to A_\Sigma^{(n)}\Psi\ (k \to \infty)$$

となる $\Psi_k \in \hat{\otimes}^n \mathsf{D}(A)$ が存在する．一方，$S_n\Psi_k \in \mathsf{D}(A_\Sigma^{(n)})$ であり，

$$A_\Sigma^{(n)} S_n \Psi_k = S_n A_\Sigma^{(n)} \Psi_k$$

が成り立つ（これは，Ψ_k を $\hat{\otimes}^n \mathsf{D}(A)$ の任意のベクトルで置き換えて成り立つ）．したがって，

$$A_\Sigma^{(n)} S_n \Psi_k \to S_n A_\Sigma^{(n)} \Psi\ (k \to \infty).$$

明らかに，$S_n\Psi_k \to S_n\Psi\ (k \to \infty)$．$A_\Sigma^{(n)}$ は閉であるから，$S_n\Psi \in \mathsf{D}(A_\Sigma^{(n)})$ かつ $A_\Sigma^{(n)} S_n\Psi = S_n A_\Sigma^{(n)}\Psi$．ゆえに，$\otimes_{\mathrm{s}}^n \mathsf{H}$ は $A_\Sigma^{(n)}$ を簡約する．反対称テンソル積 $\otimes_{\mathrm{as}}^n \mathsf{H}$ の場合も同様． □

補題 4.23 によって，$A_\Sigma^{(n)}$ の $\otimes_{\mathrm{s}}^n \mathsf{H}$ と $\otimes_{\mathrm{as}}^n \mathsf{H}$ とにおける部分が定義される．これらをそれぞれ $A_{\mathrm{s}}^{(n)}$，$A_{\mathrm{as}}^{(n)}$，としよう：

$$\mathsf{D}\left(A_{\mathrm{s}}^{(n)}\right) = \mathsf{D}\left(A_\Sigma^{(n)}\right) \cap \otimes_{\mathrm{s}}^n \mathsf{H}, \tag{4.69a}$$

$$A_{\mathrm{s}}^{(n)}\Psi = A_\Sigma^{(n)}\Psi,\ \Psi \in \mathsf{D}\left(A_{\mathrm{s}}^{(n)}\right), \tag{4.69b}$$

$$\mathsf{D}\left(A_{\mathrm{as}}^{(n)}\right) = \mathsf{D}\left(A_\Sigma^{(n)}\right) \cap \otimes_{\mathrm{as}}^n \mathsf{H}, \tag{4.70a}$$

$$A_{\mathrm{as}}^{(n)}\Psi = A_\Sigma^{(n)}\Psi,\ \Psi \in \mathsf{D}\left(A_{\mathrm{as}}^{(n)}\right). \tag{4.70b}$$

命題 2.59(iv) によって，$A_{\mathrm{s}}^{(n)}$，$A_{\mathrm{as}}^{(n)}$，はそれぞれ，$\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(\mathsf{H})$，$\mathcal{F}_{\mathrm{as}}(\mathsf{H})$ 上の自己共役演算子であり，物理的には，相互作用のない場合の，同種の粒子の n 粒子系における，A と同種の物理量を表わす（$A_{\mathrm{s}}^{(n)}$ はボース粒子系の場合であり，$A_{\mathrm{as}}^{(n)}$ はフェルミ粒子系の場合である）．特に，A が 1 粒子のハミルトニアンの場合，$A_{\mathrm{s}}^{(n)}$（$A_{\mathrm{as}}^{(n)}$）は，相互作用のない場合の n 個のボース（フェルミ）粒子系のハミルトニアンを表わす．

定理 4.22(v) によって,

$$d\Gamma(A) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_{\Sigma}^{(n)} \tag{4.71}$$

は $\mathcal{F}(\mathsf{H})$ 上の自己共役演算子である. これを A の**第 2 量子化演算子** (second quantization operator) という[*17]. これは, 物理的には, 同種の粒子が互いに区別できるとした場合の, 相互作用のない無限粒子系における, A と同種の物理量を表わす.

同様に,

$$d\Gamma_{\mathrm{s}}(A) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_{\mathrm{s}}^{(n)}, \qquad d\Gamma_{\mathrm{as}}(A) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_{\mathrm{as}}^{(n)}, \tag{4.72}$$

は, それぞれ, $\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(\mathsf{H}), \mathcal{F}_{\mathrm{as}}(\mathsf{H})$ 上の自己共役演算子であり, ボソン フォック空間, フェルミオン フォック空間における A の**第 2 量子化演算子**とよばれる. 前者は, 相互作用のない, 同種のボース粒子の無限系における, A と同種の物理量を表わし, 後者は, 相互作用のない, 同種のフェルミ粒子の無限系における, A と同種の物理量を表わす.

容易にわかるように,

$$d\Gamma(A)\Omega = 0, \quad d\Gamma_{\mathrm{s}}(A)\Omega = 0, \quad d\Gamma_{\mathrm{as}}(A)\Omega = 0, \tag{4.73}$$

が成り立つ. したがって, フォック真空 Ω は, $d\Gamma(A)$, $d\Gamma_{\mathrm{s}}(A)$, $d\Gamma_{\mathrm{as}}(A)$ の固有値 0 に属する固有ベクトルである.

例 4.12 d 次元空間 $\mathbb{R}^d$ を運動する, 質量 $m \geq 0$ の相対論的な自由粒子のエネルギーは, 運動量を $k \in \mathbb{R}^d$ とすれば, $\omega(k) = \sqrt{k^2 + m^2}$ であたえられる. この粒子の量子力学的状態のヒルベルト空間として, $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}_k^d)$ (運動量表示) がとれる. 関数 ω はこの空間上の自己共役なかけ算演算子を定義する. これも同じ記号 ω で表わす. $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}_k^d)$ を 1 粒子状態のヒルベルト空間とするボソン フォック空間は,

$$\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(\mathsf{L}^2(\mathbb{R}_k^d)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathsf{L}_{\mathrm{s}}^2(\mathbb{R}_k^{dn})$$

*17「第 2 量子化」という言い方はあまり適切ではないが, 慣習にしたがう. 第 2 量子化演算子は, A が一般の閉演算子の場合にも全く同様に定義される.

というふうに同一視できる（例 4.6 を参照）．この同一視のもとで，

$$
\begin{aligned}
&(d\Gamma_{\mathrm{s}}(\omega)\Psi)^{(0)} = 0,\\
&(d\Gamma_{\mathrm{s}}(\omega)\Psi)^{(n)}(k_1,\cdots,k_n) = \left[\sum_{j=1}^{m}\omega(k_j)\right]\Psi^{(n)}(k_1,\cdots,k_n),\\
&\qquad\qquad \text{a.e.}(k_1,\cdots,k_n),\ n\geq 1,
\end{aligned}
$$

となる．この場合の $d\Gamma_{\mathrm{s}}(\omega)$ は，**自由なスカラー量子場のハミルトニアン**を記述する．

上の 3 種の第 2 量子化演算子の関係は次の定理によってあてられる．

定理 4.24　$d\Gamma(A)$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(\mathsf{H})$，$\mathcal{F}_{\mathrm{as}}(\mathsf{H})$ によって簡約され，$d\Gamma(A)$ の $\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(\mathsf{H})$，$\mathcal{F}_{\mathrm{as}}(\mathsf{H})$ における部分はそれぞれ，$d\Gamma_{\mathrm{s}}(A)$，$d\Gamma_{\mathrm{as}}(A)$ に等しい．

証明　$\Psi=\{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}\in \mathsf{D}(d\Gamma(A))$ としよう．このとき，$\Psi^{(n)}\in\mathsf{D}\left(A_{\Sigma}^{(n)}\right)$．したがって，補題 4.23 によって，任意の $n\geq 0$ に対して，$S_n\Psi^{(n)}\in\mathsf{D}\left(A_{\Sigma}^{(n)}\right)$ であり，$S_nA_{\Sigma}^{(n)}\Psi^{(n)}=A_{\Sigma}^{(n)}S_n\Psi^{(n)}$．一方，$S_nA_{\Sigma}^{(n)}\Psi^{(n)}=(P_{\mathrm{s}}d\Gamma(A)\Psi)^{(n)}, S_n\Psi^{(n)} = (P_{\mathrm{s}}\Psi)^{(n)}$．したがって，$(P_{\mathrm{s}}d\Gamma(A)\Psi)^{(n)}=A_{\Sigma}^{(n)}(P_{\mathrm{s}}\Psi)^{(n)}\cdots(*)$．ゆえに，

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\|A_{\Sigma}^{(n)}(P_{\mathrm{s}}\Psi)^{(n)}\|^2=\|P_{\mathrm{s}}d\Gamma(A)\Psi\|^2<\infty.
$$

ゆえに，$P_{\mathrm{s}}\Psi\in\mathsf{D}(d\Gamma(A))$．したがって，$(*)$ の右辺は，$(d\Gamma(A)P_{\mathrm{s}}\Psi)^{(n)}$ と書けるので，$P_{\mathrm{s}}d\Gamma(A)\Psi=d\Gamma(A)P_{\mathrm{s}}\Psi$ がしたがう．よって，$d\Gamma(A)$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(\mathsf{H})$ によって簡約される．補題 4.23 の事実によって，

$$
\begin{aligned}
\mathsf{D}(d\Gamma(A))\cap\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(\mathsf{H}) &= \{\Psi=\{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}\in\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(\mathsf{H})|\Psi^{(n)}\in\mathsf{D}\left(A_{\mathrm{s}}^{(n)}\right),\ n\geq 0\}\\
&= \mathsf{D}\left(d\Gamma_{\mathrm{s}}(A)\right).
\end{aligned}
$$

したがって，$d\Gamma(A)$ の $\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(\mathsf{H})$ における部分は $d\Gamma_{\mathrm{s}}(A)$ に等しい．$\mathcal{F}_{\mathrm{as}}(\mathsf{H})$ の場合も同様．　□

$A = I$（H 上の恒等演算子）という特別な場合の第 2 量子化演算子

$$N_{\mathrm{ful}} := d\Gamma(I), \quad N_{\mathrm{s}} := d\Gamma_{\mathrm{s}}(I), \quad N_{\mathrm{as}} := d\Gamma_{\mathrm{as}}(I), \tag{4.74}$$

をそれぞれ，$\mathcal{F}(\mathsf{H})$，$\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(\mathsf{H})$，$\mathcal{F}_{\mathrm{as}}(\mathsf{H})$ 上の**個数演算子** (number operator) という．この名称は，任意の $\Psi \in \mathsf{D}(N_{\#})$ ($\# =$ full, s, as) に対して，

$$(N_{\#}\Psi)^{(n)} = n\Psi^{(n)}, \quad n \geq 0, \tag{4.75}$$

が成立する事実による（$A = I$ の場合，$A_{\Sigma}^{(n)} = nI_{\otimes^n \mathsf{H}}$ であることに注意）．これは，$\mathcal{F}(\mathsf{H})$ の閉部分空間としての $\otimes^n \mathsf{H}$ が，N_{ful} の固有値 n に属する固有空間であることを意味する．N_{s}，N_{as} についても同様．

4.3.4 時 間 発 展

第 2 量子化演算子が生成する強連続 1 パラメーターユニタリ群がどのような形をとるか見ておこう．そのために，フォック空間上の解析にとって有用な演算子を導入する．

ヒルベルト空間 H 上の閉演算子 A に対して，$\otimes^n \mathsf{H}$ 上の演算子 $\Gamma(A)^{(n)}$ を

$$\Gamma(A)^{(n)} := \underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{n\,\text{個}}, \quad n \geq 1, \tag{4.76}$$

によって定義する．$n = 0$ の場合は

$$\Gamma(A)^{(0)} := 1 \tag{4.77}$$

とする．定理 4.22(i) によって，

$$\Gamma(A) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma(A)^{(n)} \tag{4.78}$$

は $\mathcal{F}(\mathsf{H})$ 上の閉演算子である．

命題 4.25　(i) A がユニタリならば，$\Gamma(A)$ はユニタリである．

(ii) A が自己共役ならば，$\Gamma(A)$ は自己共役である．

証明 (i) A がユニタリならば，$\Gamma(A)^{(n)}$ はユニタリであるから，定理 4.22(iv) によって，$\Gamma(A)$ はユニタリである．

(ii) この場合，$\Gamma(A)^{(n)}$ は自己共役であるから，定理 4.22(v) によって，$\Gamma(A)$ は自己共役である． □

第 2 量子化演算子 $d\Gamma(A)(A$:自己共役) が生成する強連続 1 パラメーターユニタリ群 $\{e^{it\,d\Gamma(A)}\}_{t\in\mathbb{R}}$ について次の定理が成立する．

定理 4.26 A を自己共役演算子とする．このとき，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$e^{it\,d\Gamma(A)} = \Gamma(e^{itA}). \tag{4.79}$$

証明 定理 4.22(v) によって，$e^{it\,d\Gamma(A)} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} e^{itA_{\Sigma}^{(n)}}$．一方，定理 4.20 によって，$e^{itA_{\Sigma}^{(n)}} = \Gamma(e^{itA})^{(n)}$．したがって，(4.79) が得られる． □

補題 4.23 と同様にして，$\Gamma(A)^{(n)}$ は $\otimes_{\mathrm{s}}^{n}\mathsf{H}$ および $\otimes_{\mathrm{as}}^{n}\mathsf{H}$ によって簡約されることがわかる．演算子 $\Gamma(A)^{(n)}$ の $\otimes_{\mathrm{s}}^{n}\mathsf{H}$，$\otimes_{\mathrm{as}}^{n}\mathsf{H}$ における部分をそれぞれ，$\Gamma_{\mathrm{s}}(A)^{(n)}$，$\Gamma_{\mathrm{as}}(A)^{(n)}$ と書き，

$$\Gamma_{\mathrm{s}}(A) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma_{\mathrm{s}}(A)^{(n)}, \qquad \Gamma_{\mathrm{as}}(A) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma_{\mathrm{as}}(A)^{(n)}, \tag{4.80}$$

を導入する．命題 4.25 と同様にして，次の命題が証明される．

命題 4.27

(i) A がユニタリならば，$\Gamma_{\mathrm{s}}(A), \Gamma_{\mathrm{as}}(A)$ はユニタリである．

(ii) A が自己共役ならば，$\Gamma_{\mathrm{s}}(A), \Gamma_{\mathrm{as}}(A)$ は自己共役である．

第 2 量子化演算子 $d\Gamma_{\#}(A)(A$:自己共役，$\# = \mathrm{s, as}$) が生成する強連続 1 パラメーターユニタリ群 $\{e^{it\,d\Gamma_{\#}(A)}\}_{t\in\mathbb{R}}$ について次の定理が成立する．

定理 4.28 A を自己共役演算子とする．このとき，$\# = \mathrm{a,as}$ とすべての $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$e^{it\,d\Gamma_{\#}(A)} = \Gamma_{\#}(e^{itA}). \tag{4.81}$$

証明 定理 4.22(v) によって，$e^{it\,d\Gamma_\#(A)} = \bigoplus_{n=0}^\infty e^{itA_\#^{(n)}}$. 一方，$e^{itA_\#^{(n)}} = \Gamma_\#(e^{itA})^{(n)}$ が成り立つことは容易にわかる（まず，稠密な部分空間 $\hat{\otimes}_\#^n$H 上で成立することを示し，稠密に定義された有界演算子の拡大の一意性を使えばよい）. したがって，(4.81) が成立する. □

4.4 無限自由度の CCR の表現

フォック空間の理論と関連して，無限自由度の CCR の表現にふれておく.

4.4.1 実ベクトル空間によって添字づけられた CCR の表現

H をヒルベルト空間とする. H から H への写像 J : H → H が

(J.1) $J^2 = I$,

(J.2) (反線形性) $J(\alpha\Psi + \beta\Phi) = \alpha^* J(\Psi) + \beta^* J(\Phi)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \Psi, \Phi \in$ H,

(J.3) (等長性) $\|J\Psi\| = \|\Psi\|$, $\Psi \in$ H

をみたすとき，J を H 上の**共役子**（きょうやくし）(conjugation) という. この場合，(J.2), (J.3) と偏極恒等式を使うと

$$\langle J\Psi, J\Phi\rangle = \langle\Phi, \Psi\rangle, \quad \Psi, \Phi \in \mathsf{H},$$

が成立することがわかる. (J.1) は J が全射であることを意味する.

J を H 上の共役子とする. このとき，H の部分集合

$$\mathsf{H}_J := \{\Psi \in \mathsf{H} |\ J\Psi = \Psi\}$$

が，H の内積から定まる内積によって，実ヒルベルト空間になることを証明するのは難しくない. さらに，任意の $\Psi \in$ H に対して，$\Psi_1, \Psi_2 \in \mathsf{H}_J$ がただひとつ存在して，

$$\Psi = \Psi_1 + i\Psi_2$$

と書ける．実際，存在については，$\Psi_1 = (\Psi + J\Psi)/2$, $\Psi_2 = (\Psi - J\Psi)/(2i)$ とすればよい．一意性も容易にわかる[*18]．したがって，

$$\mathsf{H} = \{f_1 + if_2 | f_j \in \mathsf{H}_J,\ j = 1, 2\}.$$

例 4.13　写像 $\hat{j} : \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d) \to \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ を

$$(\hat{j}f)(x) = f(x)^*, \quad f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d),$$

によって定義する．このとき，$\hat{j}$ は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上の共役子である．この場合，

$$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)_{\hat{j}} = \{f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d) | f \text{ は実数値 } \}$$

となる．

定義 4.29　H を可分なヒルベルト空間とし，J を H 上の共役子とする．V を H_J の稠密な部分空間とする．$\mathcal{F}$ をヒルベルト空間，$\mathcal{D}$ を $\mathcal{F}$ の稠密な部分空間，$\Pi_{\mathsf{V}} := \{\phi(f),\ \pi(f) |\ f \in \mathsf{V}\}$ を V によって添字づけられた，ヒルベルト空間 $\mathcal{F}$ 上の自己共役演算子の族とする．次の条件 (C.1)〜(C.3) がみたされるとき，3 つ組 $\{\mathcal{F}, \mathcal{D}, \Pi_{\mathsf{V}}\}$ を V によって**添字づけられた CCR の表現**という．この場合，$\mathcal{F}$ をその表現空間とよぶ．

(C.1) $\mathcal{D} \subset \cap_{f \in \mathsf{V}} \mathsf{D}(\phi(f)) \cap \mathsf{D}(\pi(f))$ であり，各 $f \in \mathsf{V}$ に対して，$\phi(f), \pi(f)$ は $\mathcal{D}$ を不変にする．

(C.2) (線形性) $\mathcal{D}$ 上で，

$$\phi(af + bg) = a\phi(f) + b\phi(g),$$
$$\pi(af + bg) = a\pi(f) + b\pi(g), \qquad a, b \in \mathbb{R},\ f, g \in \mathsf{V}.$$

(C.3) $\mathcal{D}$ 上で交換関係

$$[\phi(f),\, \pi(g)] = i\hbar\langle f, g\rangle_{\mathsf{H}},$$
$$[\phi(f),\, \phi(g)] = 0,\ [\pi(f),\, \pi(g)] = 0, \quad f, g \in \mathsf{V},$$

がみたされる．これを V 上の CCR という．

[*18] 複素数の共役をとる演算との類似に注意．実際，ヒルベルト空間上の共役子の概念は，複素数の共役をとる演算の一般化とみることができる．

注意 (i) V は H_J で稠密であるから，V の元から，H_J の CONS をつくることができる．いま，その任意のひとつを $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ $(N := \dim \mathsf{H}_J \leq \infty)$ とし，

$$Q_n := \phi(\psi_n), \quad P_n := \pi(\psi_n),$$

とおけば，$\mathcal{D}$ 上で

$$[Q_n, P_m] = i\hbar\delta_{nm}, \quad [Q_n, Q_m] = 0, \quad [P_n, P_m] = 0,$$

が成立するので，$\{\mathcal{F}, \mathcal{D}, \{Q_n, P_n\}_{n=1}^N\}$ は自由度 N の CCR の表現をあたえる．特に，H が可算無限次元であれば，H_J もそうであるので，$N = \infty$ であり，$\{\mathcal{F}, \mathcal{D}, \{Q_n, P_n\}_{n=1}^\infty\}$ は無限自由度の CCR の表現となる．

$N < \infty$ のとき，$a_n(f) = \langle\psi_n, f\rangle_{\mathsf{H}}$ とおけば，$f = \sum_{n=1}^n a_n(f)\psi_n$ であるから，(C.2) により，

$$\phi(f) = \sum_{n=1}^N a_n(f)Q_n, \quad \pi(f) = \sum_{n=1}^N a_n(f)P_n.$$

なお，$N = \infty$ のときは，右辺が収束するかどうかは，一般にはわからない．

(ii) $V_c := \{f_1 + if_2 | f_j \in \mathsf{V}\}$（V の**複素化**という）とすれば，これは H で稠密な部分空間である．V_c の元 $f = f_1 + if_2$ に対して，

$$\phi(f) := \phi(f_1) + i\phi(f_2), \quad \pi(f) := \pi(f_1) + i\pi(f_2),$$

とすれば，(C.2) は，$a, b \in \mathbb{C}$, $f, g \in \mathsf{V}_c$ として成立する．ただし，この場合，(C.3) のはじめの交換関係は

$$[\phi(f), \pi(g)] = i\hbar\langle Jf, g\rangle_{\mathsf{H}}, \quad f, g \in \mathsf{V}_c,$$

という形をとる．以下，CCR の表現があたえられたとき，いま述べた，添字集合の拡張はなされているものとする．

以下の目的は，H 上のボソン フォック空間上に CCR の表現をひとつ構成することである．

4.4.2 消滅演算子と生成演算子

H をヒルベルト空間とする．記号上の便宜のため，

$$\mathsf{H}_{\mathrm{s}}^n = \otimes_{\mathrm{s}}^n \mathsf{H}$$

とおく．ボソン フォック空間 $\mathcal{F}_s(\mathsf{H})$ の稠密な部分空間

$$\mathcal{F}_{s,0}(\mathsf{H}) := \{\Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_s(\mathsf{H}) | \Psi^{(n)} \in \mathsf{H}_s^n,\ n \geq 0;\ \text{ある番号 } n_0 \\ \text{があって，} n \geq n_0 \text{ ならば } \Psi^{(n)} = 0\} \tag{4.82}$$

を導入する．これを $\mathcal{F}_s(\mathsf{H})$ の**有限粒子ベクトルの空間**という．これは諸々の計算をするうえで便利な空間である．

各 $n \geq 0$, $f \in \mathsf{H}$ と任意の $\Phi \in \mathsf{H}_s^{n+1}, \Psi \in \mathsf{H}_s^n$ に対して，

$$L_n(\Phi, \Psi) = \sqrt{n+1}\langle \Phi, S_{n+1}(f \otimes \Psi)\rangle \tag{4.83}$$

とおくと，L_n は $\mathsf{H}_s^{n+1} \times \mathsf{H}_s^n$ 上の準双線形形式である[*19]．容易にわかるように，

$$|L_n(\Phi, \Psi)| \leq \sqrt{n+1}\|f\|\,\|\Phi\|\,\|\Psi\|.$$

したがって，L_n は有界である．ゆえに，定理 2.65 によって，

$$L_n(\Phi, \Psi) = \langle A_{n+1}(f)\Phi, \Psi\rangle, \quad \Phi \in \mathsf{H}_s^{n+1}, \Psi \in \mathsf{H}_s^n, \tag{4.84}$$

をみたす有界線形演算子 $A_{n+1}(f) : \mathsf{H}_s^{n+1} \to \mathsf{H}_s^n$ が一意的に存在する．この場合，

$$\|A_{n+1}(f)\Phi\| \leq \sqrt{n+1}\|f\|\,\|\Phi\|. \tag{4.85}$$

(4.83) と (4.84) により，

$$\langle A_{n+1}(f)\Phi, \Psi\rangle = \sqrt{n+1}\langle \Phi, S_{n+1}(f \otimes \Psi)\rangle, \quad \Phi \in \mathsf{H}_s^{n+1},\ \Psi \in \mathsf{H}_s^n. \tag{4.86}$$

演算子 $A_{n+1}(f)$ を用いて，各 $f \in \mathsf{H}$ に対して，$\mathcal{F}_s(\mathsf{H})$ 上の演算子 $A(f)$ を

*19 準双線形形式については，2 章 2.7 節，定理 2.64 のあとの記述を参照．

次のように定義する：

$$\mathsf{D}(A(f)) := \left\{ \Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_{\mathrm{s}}(\mathsf{H}) \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} \|A_{n+1}(f)\Psi^{(n+1)}\|^2 < \infty \right\}, \tag{4.87a}$$

$$(A(f)\Psi)^{(n)} := A_{n+1}(f)\Psi^{(n+1)}, \quad n \geq 0,\ \Psi \in \mathsf{D}(A(f)). \tag{4.87b}$$

容易にわかるように，

$$\mathcal{F}_{\mathrm{s},0}(\mathsf{H}) \subset \mathsf{D}(A(f)), \quad f \in \mathsf{H}, \tag{4.88}$$

である．したがって，各 $A(f)$ は稠密に定義されている．また，$A(f)$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{s},0}(\mathsf{H})$ を不変にし，$\mathsf{H}_{\mathrm{s}}^n$ を $\mathsf{H}_{\mathrm{s}}^{n-1}$ にうつす ($\mathsf{H}^{-1} := \{0\}$ とする)．つまり，$A(f)$ はボソンをひとつ減らす働きをする．このため，$A(f)$ はボソン フォック空間 $\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(\mathsf{H})$ 上の**消滅演算子** (annihilation operator) とよばれる．

消滅演算子 $A(f)$ とフォック真空 Ω の定義から，すべての $f \in \mathsf{H}$ に対して，

$$A(f)\Omega = 0 \tag{4.89}$$

が成り立つ．

命題 4.30 演算子 $A(f)$ は閉演算子であり，$\mathcal{F}_{\mathrm{s},0}(\mathsf{H})$ は $A(f)$ の芯 (core) である．

証明 $\Psi_n \in \mathsf{D}(A(f)), \Psi_n \to \Psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{s}}(\mathsf{H}),\ A(f)\Psi_n \to \Phi \in \mathcal{F}_{\mathrm{s}}(\mathsf{H})\ (n \to \infty)$ としよう．このとき，任意の $k \geq 0$ に対して，$\Psi_n^{(k)} \to \Psi^{(k)}$, $A_{k+1}(f)\Psi_n^{(k+1)} \to \Phi^{(k)}\ (n \to \infty)$．$A_{k+1}(f)$ は有界であるから，$\Phi^{(k)} = A_{k+1}(f)\Psi^{(k+1)} \cdots (*)$．したがって，$\sum_{k=0}^{\infty} \|A_{k+1}(f)\Psi^{(k+1)}\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \|\Phi^{(k)}\|^2 < \infty$．ゆえに，$\Psi \in \mathsf{D}(A(f))$．これがひとたびわかれば，$(*)$ により，$\Phi = A(f)\Psi$ である．以上から，$A(f)$ は閉である．

任意の $\Psi \in \mathsf{D}(A(f))$ に対して，$\Psi_N := \{\Psi^{(0)}, \cdots, \Psi^{(N)}, 0, 0, \cdots\} \in \mathcal{F}_{\mathrm{s},0}(\mathsf{H})$ とすれば，$\Psi_N \to \Psi$, $A(f)\Psi_N \to A(f)\Psi\ (N \to \infty)$ が成立することがわかる．したがって，$\mathcal{F}_{\mathrm{s},0}(\mathsf{H})$ は $A(f)$ の芯 (core) である． □

消滅演算子 $A(f)$ のより具体的な作用は，(4.86) を用いて次のように計算される：$\Psi^{(n)} = S_n(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n), \psi_j \in \mathsf{H}, j = 1, \cdots, n$, $\Psi^{(m)} = 0,\ m \neq n$, であるようなベクトル $\Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ に対して，

$$(A(f)\Psi)^{(n-1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \langle f, \psi_j \rangle S_{n-1}(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{\psi_j} \otimes \cdots \otimes \psi_n), \tag{4.90a}$$

$$(A(f)\Psi)^{(m)} = 0, \quad m \neq n-1. \tag{4.90b}$$

ただし，$\widehat{\psi_j}$ は ψ_j を除くことを指示する記号である．

(4.86) から，$A(f)$ の共役演算子 $A(f)^*$ について，

$$\begin{aligned} &\mathsf{D}(A(f)^*) \\ &= \left\{ \Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_{\mathrm{s}}(\mathsf{H}) \middle| \sum_{n=1}^{\infty} n \| S_n(f \otimes \Psi^{(n-1)}) \|^2 < \infty \right\}, \end{aligned} \tag{4.91a}$$

$$(A(f)^*\Psi)^{(0)} = 0, \tag{4.91b}$$

$$(A(f)^*\Psi)^{(n)} = \sqrt{n} S_n(f \otimes \Psi^{(n-1)}), \quad \Psi \in \mathsf{D}(A(f)^*),\ n \geq 1, \tag{4.91c}$$

が成り立つことがわかる．特に，$A(f)^*$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{s},0}(\mathsf{H})$ を不変にし，$\mathsf{H}_{\mathrm{s}}^{n}$ を $\mathsf{H}_{\mathrm{s}}^{n+1}$ にうつす．つまり，$A(f)^*$ はボソンをひとつふやす機能をもっている．このことから，$A(f)^*$ はボソン フォック空間 $\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(\mathsf{H})$ における**生成演算子** (creation operator) とよばれる．$A(f)$ の場合と同様にして，$\mathcal{F}_{\mathrm{s},0}(\mathsf{H})$ が $A(f)^*$ の芯であることが示される．

(4.91b) から，すべての $f_j \in \mathsf{H}$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して，

$$(A(f_1)^* \cdots A(f_n)^* \Omega)^{(m)} = \delta_{mn} \sqrt{n!} S_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) \tag{4.92}$$

が成立する．したがって，各 $n \geq 1$ に対して，部分空間

$$\mathsf{H}_{\mathrm{s,\ fin}}^{n} := \mathcal{L}\left(\{A(f_1)^* \cdots A(f_n)^* \Omega | \psi_j \in \mathsf{H}, j = 1, \cdots, n\}\right) \tag{4.93}$$

は $\mathsf{H}_{\mathrm{s}}^{n}$ で稠密である．ゆえに，

$$\mathcal{F}_{\mathrm{s,fin}}(\mathsf{H}) := \{\Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_{\mathrm{s},0}(\mathsf{H}) | \Psi^{(n)} \in \mathsf{H}_{\mathrm{s,fin}}^{n},\ n \geq 0\} \quad (4.94)$$

は $\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(\mathsf{H})$ で稠密である．

4.4.3 CCR のフォック表現

命題 4.31 $\mathcal{F}_{\mathrm{s},0}(\mathsf{H})$ 上で次の交換関係が成立する：

$$[A(f), A(g)^*] = \langle f, g\rangle_{\mathsf{H}}, \quad (4.95\mathrm{a})$$

$$[A(f), A(g)] = 0 = [A(f)^*, A(g)^*], \quad f, g \in \mathsf{H}. \quad (4.95\mathrm{b})$$

証明 (4.95a) だけを証明する（他の場合も同様）．まず，(4.95a) が $\mathcal{F}_{\mathrm{s,fin}}(\mathsf{H})$ 上で成立することを示す．それには，$\Psi = \{z, 0, \cdots, S_m(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_m), 0, \cdots\}$ ($z \in \mathbf{C}$, $m \geq 1$) という形のベクトル $\Psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{s,fin}}(\mathsf{H})$ に対して，$[A(f), A(g)^*]\Psi = \langle f, g\rangle \Psi \cdots (*)$ を示せば十分である．実際，この場合，

$$\begin{aligned}
(A(g)^*\Psi)^{(m+1)} &= \sqrt{m+1}S_{m+1}(g \otimes S_m(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_m)) \\
&= \sqrt{m+1}S_{m+1}(g \otimes \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_m), \\
(A(f)\Psi)^{(m-1)} &= \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^{m} \langle f, \psi_j\rangle S_{m-1}(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{\psi}_j \otimes \cdots \otimes \psi_m),
\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
&(A(f)A(g)^*\Psi)^{(m)} \\
&= \langle f, g\rangle S_m(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_m) \\
&+ \sum_{j=1}^{m} \langle f, \psi_j\rangle S_m(g \otimes \psi_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{\psi}_j \otimes \cdots \otimes \psi_m), \\
&(A(g)^*A(f)\Psi)^{(m)} \\
&= \sqrt{m}S_m\left(g \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^{m} \langle f, \psi_j\rangle S_{m-1}(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{\psi}_j \otimes \psi_m)\right]\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \langle f, \psi_j\rangle S_m(g \otimes \psi_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{\psi}_j \otimes \cdots \otimes \psi_m).
\end{aligned}$$

したがって，$([A(f), A(g)^*]\Psi)^{(m)} = \langle f, g\rangle \Psi^{(m)}$．一方，

$$([A(f), A(g)^*]\Psi)^{(0)} = \langle f, g\rangle \Psi^{(0)},$$
$$([A(f), A(g)^*]\Psi)^{(n)} = 0 = \langle f, g\rangle \Psi^{(n)},\ n \neq 0, m,$$

を示すのは容易である．ゆえに，$(*)$ が成り立つ．

任意の $\Psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{s},0}(\mathsf{H})$ に対しては，$\Psi_N \to \Psi\ (N \to \infty)$ となる $\Psi_N \in \mathcal{F}_{\mathrm{s,fin}}(\mathsf{H})$ がとれる．前半の結果より，$[A(f), A(g)^*]\Psi_N = \langle f, g\rangle \Psi_N \cdots (**)$．適当な番号 M をとれば，Ψ, Ψ_N は $\bigoplus_{n=0}^{M} \mathsf{H}_{\mathrm{s}}^n$ の元とみなせる．ところで，消滅演算子と生成演算子の定義から，$A(f)$ $(A(f)^*)$ は，任意の $n \geq 0$ に対して，$\mathsf{H}_{\mathrm{s}}^n$ から $\mathsf{H}_{\mathrm{s}}^{n-1}$ $(\mathsf{H}_{\mathrm{s}}^{n+1})$ への有界線形演算子である．したがって，

$$A(f)A(g)^*\Psi_N \to A(f)A(g)^*\Psi, \quad A(g)^*A(f)\Psi_N \to A(g)^*A(f)\Psi\ (N \to \infty)$$

がしたがう．ゆえに，$(**)$ において，$N \to \infty$ とすれば，$[A(f), A(g)^*]\Psi = \langle f, g\rangle \Psi$ が得られる．□

演算子

$$\Phi_{\mathrm{S}}(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}(A(f) + A(f)^*) \tag{4.96}$$

によって定義される対称演算子を**シーガル** (Segal) **の場の演算子** (Segal's field operator) とよぶ．

定理 4.32　(i) 各 $f \in \mathsf{H}$ に対して，$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{s,fin}}$，$\mathcal{F}_{\mathrm{s},0}(\mathsf{H})$ を不変にし，$\mathcal{F}_{\mathrm{s},0}(\mathsf{H})$ 上で交換関係

$$[\Phi_{\mathrm{S}}(f), \Phi_{\mathrm{S}}(g)] = i\mathrm{Im}\,\langle f, g\rangle, \quad f, g \in \mathsf{H}, \tag{4.97}$$

が成り立つ．

(ii) 各 $f \in \mathsf{H}$ に対して，$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{s,fin}}(\mathsf{H})$ 上で本質的に自己共役である．

証明　(i) $\mathcal{F}_{\mathrm{s,fin}}$，$\mathcal{F}_{\mathrm{s},0}(\mathsf{H})$ の $\Phi_{\mathrm{S}}(f)$-不変性は，それらが，$A(f)$，$A(f)^*$ によって不変であることによる．交換関係 (4.97) は (4.95a,b) からしたがう．

(ii) $B_\pm := (\Phi_{\rm S} \pm i) \restriction \mathcal{F}_{\rm s,fin}(\mathsf{H})$ の値域が稠密であることを示せばよい（このとき，定理 2.44 によって，題意が成立）．$\Psi \in \mathsf{R}(B_+)^\perp$ しよう．したがって，任意の $\Phi \in \mathcal{F}_{\rm s,fin}(\mathsf{H})$ に対して，$\langle \Psi, B_+\Phi\rangle = 0$．ベクトル Φ として，特に，$m \neq n$ ならば $\Phi^{(m)} = 0$ をみたすものをとれば，

$$\sqrt{2}i\langle \Psi^{(n)}, \Phi^{(n)}\rangle + \sqrt{n+1}\langle \Psi^{(n+1)}, f\otimes\Phi^{(n)}\rangle + \langle \Psi^{(n-1)}, A_n(f)\Phi^{(n)}\rangle = 0.$$

一方，(4.86) によって，

$$\sqrt{n+1}\langle \Psi^{(n+1)}, f\otimes\Phi^{(n)}\rangle = \langle A_{n+1}(f)\Psi^{(n+1)}, \Phi^{(n)}\rangle, \tag{4.98}$$

$$\langle \Psi^{(n-1)}, A_n(f)\Phi^{(n)}\rangle = \sqrt{n}\langle S_n(f\otimes\Psi^{(n-1)}, \Phi^{(n)}\rangle = \sqrt{n}\langle f\otimes\Psi^{(n-1)}, \Phi^{(n)}\rangle.$$

したがって，

$$\langle A_{n+1}(f)\Psi^{(n+1)}, \Phi^{(n)}\rangle + \sqrt{n}\langle f\otimes\Psi^{(n-1)}, \Phi^{(n)}\rangle = -\sqrt{2}i\langle \Psi^{(n)}, \Phi^{(n)}\rangle.$$

これと $\mathsf{H}^n_{\rm s,fin}$ の $\mathsf{H}^n_{\rm s}$ での稠密性により，

$$A_{n+1}(f)\Psi^{(n+1)} + \sqrt{n}f\otimes\Psi^{(n-1)} = \sqrt{2}i\Psi^{(n)}$$

がすべての $n \geq 0$ に対してして成り立つ（$\Psi^{(-1)} := 0$)．この式と $\Psi^{(n)}$ の内積をとると，

$$\langle \Psi^{(n)}, A_{n+1}(f)\Psi^{(n+1)}\rangle + \sqrt{n}\langle \Psi^{(n)}, f\otimes\Psi^{(n-1)}\rangle = \sqrt{2}i\|\Psi^{(n)}\|^2.$$

ふたたび (4.98) を使えば，

$$\sqrt{n+1}\langle f\otimes\Psi^{(n)}, \Psi^{(n+1)}\rangle + \sqrt{n}\langle \Psi^{(n)}, f\otimes\Psi^{(n-1)}\rangle = \sqrt{2}i\|\Psi^{(n)}\|^2$$

を得る．両辺を n について加えれば，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}\langle f\otimes\Psi^{(n)}, \Psi^{(n+1)}\rangle + \sqrt{n}\langle \Psi^{(n)}, f\otimes\Psi^{(n-1)}\rangle\right) = \sqrt{2}i\|\Psi\|^2. \tag{4.99}$$

ここで，$\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n+1}\langle f\otimes\Psi^{(n)}, \Psi^{(n+1)}\rangle, \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n}\langle \Psi^{(n)}, f\otimes\Psi^{(n-1)}\rangle$ は収束するとは限らないことに注意．だが，(4.99) の左辺は実数であることはわか

る．しかし，右辺は純虚数であるから，両辺とも 0 でなければならない．したがって，$\|\Psi\| = 0$，すなわち，$\Psi = 0$ が導かれる．ゆえに，$\mathsf{R}(B_+)$ は稠密である．同様にして，$\mathsf{R}(B_-)$ も稠密であることが示される．□

さて，J を H 上の共役とし，$f \in \mathsf{H}_J$ に対して，

$$\phi_{\mathrm{F}}(f) := \sqrt{\hbar}\,\overline{\Phi_S(f)}, \quad \pi_{\mathrm{F}}(f) := \sqrt{\hbar}\,\overline{\Phi_S(if)}$$

を定義する．定理 4.32 によって，$\phi_{\mathrm{F}}(f)$, $\pi_{\mathrm{F}}(f)$ は自己共役である．さらに，これらは，$\mathcal{F}_{\mathrm{s},\#}(\mathsf{H})(\# = 0,\mathrm{fin})$ を不変にし，この部分空間上で

$$[\phi_{\mathrm{F}}(f), \pi_{\mathrm{F}}(g)] = i\hbar\langle f, g\rangle,$$
$$[\phi_{\mathrm{F}}(f), \phi_{\mathrm{F}}(g)] = 0, \quad [\pi_{\mathrm{F}}(f), \pi_{\mathrm{F}}(g)] = 0,\ f, g \in \mathsf{H}_J,$$

をみたすことがわかる [(4.97) と，$f, g \in \mathsf{H}_J$ ならば $\langle f, g\rangle \in \mathbb{R}$ に注意]．こうして，$\{\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(\mathsf{H}), \mathcal{F}_{\mathrm{s},\#}(\mathsf{H}), \{\phi_{\mathrm{F}}(f), \pi_{\mathrm{F}}(f) | f \in \mathsf{H}_J\}\}$ は，H_J によって添字づけられた CCR の表現であることがわかる．この表現を CCR の**フォック表現** (Fock representation) という．

(4.96) と対応 $f \to A(f)$ の反線形性により，

$$\Phi_{\mathrm{S}}(if) = \frac{i}{\sqrt{2}}(A(f)^* - A(f)). \tag{4.100}$$

これから，すべての $f \in \mathsf{H}$ に対して，

$$A(f) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{\mathrm{S}}(f) + i\Phi_{\mathrm{S}}(if))\ (\mathsf{D}(A(f)) \cap \mathsf{D}(A(f)^*)\ \text{上}), \tag{4.101a}$$

$$A(f)^* \ = \ \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{\mathrm{S}}(f) - i\Phi_{\mathrm{S}}(if))\ (\mathsf{D}(A(f)) \cap \mathsf{D}(A(f)^*)\ \text{上}), \tag{4.101b}$$

が成り立つ．これらは，シーガルの場の演算子を用いて，生成・消滅演算子を表わす式である．

注意　$\{\mathcal{F}, \mathcal{D}, \{\phi(f), \pi(f) | f \in \mathsf{V}\}\}$ を V によって添字づけられた CCR の表現とするとき，

$$a_{\mathsf{V}}(f) := \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\phi(f) + i\pi(f)) \tag{4.102a}$$

とすれば，

$$a_{\mathsf{V}}(f)^* = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\phi(f) - i\pi(f))\ (\mathsf{D}(\phi(f)) \cap \mathsf{D}(\pi(f))\ 上), \quad (4.102b)$$

であり，$\mathcal{D}$ 上で

$$[a_{\mathsf{V}}(f), a_{\mathsf{V}}(g)^*] = \langle f, g\rangle_{\mathsf{H}}, \quad (4.103a)$$

$$[a_{\mathsf{V}}(f), a_{\mathsf{V}}(g)] = 0, \quad [a_{\mathsf{V}}(f)^*, a_{\mathsf{V}}(g)^*] = 0,\ f, g \in \mathsf{V}, \quad (4.103b)$$

が成立することが容易にわかる．このことから，交換関係 (4.103) も V 上の CCR とよび，演算子の族 $\{a_{\mathsf{V}}(f) | f \in \mathsf{V}\}$ をこの意味での CCR の表現という場合がある．

4.4.4 演算子値超関数，フォック表現の例

はじめに，場の量子論との関連で重要な役割を演じるある一般概念を定義する．$\mathcal{F}$ をヒルベルト空間，$\mathcal{D}$ を $\mathcal{F}$ の稠密な部分空間，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の急減少関数の空間とする．各 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\mathcal{F}$ 上の線形演算子 $\varphi(f)$ が対応し，次の条件 (φ.1)～(φ.3) をみたすとき，この対応 $\varphi : f \to \varphi(f)$ を**演算子値超関数** (operator-valued distribution) という．

(φ.1) すべての $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\mathcal{D} \subset \mathsf{D}(\varphi(f))$.

(φ.2) (線形性) すべての $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して，$\mathcal{D}$ 上で，$\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g)$.

(φ.3) (連続性) 任意の $\Psi, \Phi \in \mathcal{D}$ に対して，写像 $f \to \langle \Psi, \varphi(f)\Phi\rangle$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の位相で連続である（言い換えると，写像 $f \to \langle \Psi, \varphi(f)\Phi\rangle$ は $\mathbb{R}^d$ 上の緩増加超関数であるということ）*20.

この場合，$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) f(x) dx$ によって，形式的シンボル $\varphi(x)$ $(x \in \mathbb{R}^d)$ を導入し，これを φ の**演算子値超関数核**という．

以下において，CCR のフォック表現が演算子超関数によってあたえられる例を見る．まず，準備として，ある基本的な一般的事実を述べる．

H をヒルベルト空間，N_{s} を $\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(\mathsf{H})$ 上の個数演算子とする [(4.74) を参照]．スペクトル定理によって，任意の $\alpha > 0$ に対して，非負の自己共役作用素 N_{s}^{α} が

---

*20 付録 C を参照.

定義される．$N_{\rm s}$ は，$\otimes_{\rm s}^n \mathsf{H}$ 上では単に数 n をかける演算子であるので，$N_{\rm s}^\alpha$ は次のように同定される（2 章，例 2.25 を参照）：

$$\mathsf{D}(N_{\rm s}^\alpha) = \left\{ \Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}_{\rm s}(\mathsf{H}) \middle| \sum_{n=0}^\infty n^{2\alpha} \|\Psi^{(n)}\|^2 < \infty \right\},$$
$$(N_{\rm s}^\alpha \Psi)^{(n)} = n^\alpha \Psi^{(n)}, \quad n \geq 0,\ \Psi \in \mathsf{D}(N_{\rm s}^\alpha).$$

生成・消滅作用素と個数作用素の比較は次の命題によってあたえられる．

命題 4.33　任意の $f \in \mathsf{H}$ に対して，$\mathsf{D}(N_{\rm s}^{1/2}) \subset \mathsf{D}(A(f) \cap \mathsf{D}(A(f)^*)$ であり，すべての $\Psi \in \mathsf{D}(N_{\rm s}^{1/2})$ に対して，不等式

$$\|A(f)\Psi\| \leq \|f\|\,\|N_{\rm s}^{1/2}\Psi\|, \tag{4.104a}$$
$$\|A(f)^*\Psi\| \leq \|f\|\,\|(N_{\rm s}+1)^{1/2}\Psi\|, \tag{4.104b}$$

が成立する．

証明　(4.85) と (4.87a,b) によって，任意の $\Psi \in d(N_{\rm s}^{1/2})$ に対して，

$$\|A(f)\Psi\|^2 = \sum_{n=0}^\infty \|(A(f)\Psi)^{(n)}\|^2 \leq \|f\|^2 \sum_{n=0}^\infty (n+1)\|\Psi^{(n+1)}\|^2$$
$$= \|f\|^2 \|N_{\rm s}^{1/2}\Psi\|^2 < \infty.$$

したがって，$\mathsf{D}(N_{\rm s}^{1/2}) \subset \mathsf{D}(A(f)$ であり，(4.104a) を得る．(4.91a,b,c) から，同様にして，(4.104b) が得られる．□

さて，$\mathsf{H} = \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上のボソン フォック空間 $\mathcal{F}_{\rm s}(\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d))$ の場合を考えよう．$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上の共役子として，例 4.13 の $\hat{j}$ をとる．$\mathcal{S}_{\rm real}(\mathbb{R}^d)$ を実数値の急減少関数の全体とする．これは，実数値の 2 乗可積分関数からつくられるヒルベルト空間 $\mathsf{L}^2_{\rm real}(\mathbb{R}^d) = \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)_{\hat{j}}$ の稠密な部分空間である．$n > d/4$ をみたす任意の自然数 n に対して，積分

$$C_n := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1+|x|^{2n})^2} dx$$

は有限であり，任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d}(1+|x|^{2n})^{-2}(1+|x|^{2n})^2|f(x)|^2dx \\ &\le C_nD_n(f)^2\end{aligned}$$

ただし，$D_n(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}^d}[(1+|x|^{2n})|f(x)|] < \infty$．これと命題 4.33 によって，

$$\|A(f)\Psi\| \le \sqrt{C_n}D_n(f)\|N_{\mathrm{s}}^{1/2}\Psi\|.$$

これから，特に，任意の $\Psi, \Phi \in \mathcal{F}_{\mathrm{s},0}(\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d))$ と $f \in \mathcal{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$|\langle\Psi, \phi_{\mathrm{F}}(f)\Phi\rangle| \le \sqrt{2C_n}D_n(f)\|N_{\mathrm{s}}^{1/2}\Psi\|\,\|N_{\mathrm{s}}^{1/2}\Phi\|.$$

したがって，対応 $\phi_{\mathrm{F}} : f \to \phi_{\mathrm{F}}(f)$ は演算子値超関数である．同様に，対応 $\pi_{\mathrm{F}} : f \to \phi_{\mathrm{F}}(f)$ も演算子値超関数であることがわかる．これらの演算子値超関数の核を用いると，CCR は，

$$\begin{aligned}&[\phi_{\mathrm{F}}(x),\ \pi_{\mathrm{F}}(y)] = i\hbar\delta^d(x-y), \\ &[\phi_{\mathrm{F}}(x),\ \phi_{\mathrm{F}}(y)] = 0, \quad [\pi_{\mathrm{F}}(x),\ \pi_{\mathrm{F}}(y)] = 0,\end{aligned}$$

と象徴的に表わされる．ここで，超関数論の意味で，

$$\langle f, g\rangle_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d}\delta^d(x-y)f(x)g(y)dxdy,\ f, g \in \mathcal{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^d)$$

と書かれることを用いた．こうして，3 章，3.3.6 項でふれた連続無限自由度の CCR の表現がひとつ構成される．

注意　H が L^2 空間の場合における，CCR のフォック表現は，自由なスカラー量子場を構成したり，他の相互作用のある量子場の理論を構成するための素材となる．この点に関して，さらに詳しいことは，江沢　洋・新井朝雄『場の量子論と統計力学』（日本評論社，1988）を参照されたい．

第 4 章　演習問題

1. $(M_j,\ \mu_j)$, $j=1,\cdots,N$, を測度空間，$\mathsf{L}^2(M_j, d\mu_j)$ の CONS を $\{\psi_n^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$ とし，

$$\Omega_{n_1,\cdots,n_N}(x_1,\cdots,x_N)=\prod_{j=1}^{N}\psi_{n_j}^{(j)}(x_j),\quad (x_1,\cdots,x_N)\in M_1\times\cdots\times M_N,$$

とおく．このとき，$\{\Omega_{n_1,\cdots,n_N}\}_{n_j\in\mathbb{N};j=1,\cdots,N}$ は $\mathsf{L}^2(M_1\times\cdots\times M_N, d\mu_1\otimes\cdots\otimes d\mu_N)$ の CONS であることを証明せよ．

2. $\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu; \mathsf{H})$ を 4.1.4 項のヒルベルト空間とし，$\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を H の CONS とする．このとき，次の (i), (ii) を証明せよ．

(i)　任意の $F\in\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu; \mathsf{H})$ に対して，

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\mathsf{X}}\|F(x)-\sum_{n=1}^{N}\langle\Phi_n, F(x)\rangle_{\mathsf{H}}\Phi_n\|^2 d\mu(x)=0.$$

(ii)　任意の $F, G\in\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu; \mathsf{H})$ に対して，

$$\langle F, G\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathsf{X}}\langle F(x), \Phi_n\rangle_{\mathsf{H}}\langle\Phi_n, G(x)\rangle_{\mathsf{H}}d\mu(x).$$

3. 自然数 r に対して，$I_r=\{1,\cdots,r\}$ とし，$r_j\in\mathbb{N}$, $j=1,\cdots,N$, に対して，直積集合 $I:=I_{r_1}\times\cdots\times I_{r_N}$ によって添字づけられた有限 N 重数列（すなわち，I から $\mathbb{C}$ への写像）の全体を $\mathbb{C}^I$ とする：

$$\mathbb{C}^I:=\{a=\{a_{i_1i_2\cdots i_N}\}_{i_j\in I_{r_j};j=1,\cdots,N}|a_{i_1i_2\cdots i_N}\in\mathbb{C},\ i_j\in I_{r_j},\ j=1,\cdots,N\}.$$

(i)　任意の二つの元 $a, b\in\mathbb{C}^I$ に対して，

$$\langle a, b\rangle:=\sum_{i_j\in I_{r_j};j=1,\cdots,N}a_{i_1i_2\cdots i_N}^{*}b_{i_1i_2\cdots i_N}$$

とすれば，これは，$\mathbb{C}^I$ の内積であり，この内積に関して，$\mathbb{C}^I$ は，次元が $r_1r_2\cdots r_N$ のヒルベルト空間であることを示せ．

(ii)　$\otimes_{j=1}^{N}\mathbb{C}^{r_j}$ から $\mathbb{C}^I$ へのユニタリ変換 $\hat{u}$ で

$$\hat{u}(z_1\otimes\cdots\otimes z_N)=\{z_{1i_1}\cdots z_{Ni_N}\}_{i_j\in I_{r_j};j=1,\cdots,N},\quad z_j=(z_{j1},\cdots,z_{jr_j})\in\mathbb{C}^{r_j},\ j=1,\cdots,N,$$

となるものがただひとつ存在することを証明せよ．

注意．問 (ii) のユニタリ変換による，$\otimes_{j=1}^N \mathbb{C}^{r_j}$ と $\mathbb{C}^I$ との同型をこれらのヒルベルト空間の自然な同型といい，この意味で，$\otimes_{j=1}^N \mathbb{C}^{r_j} = \mathbb{C}^I$ と記す．

4. (4.50) で定義される射影演算子の族 $\{F(J)|J \in \mathsf{B}^1\}$ は 1 次元のスペクトル測度であり，(4.51) が成立することを証明せよ．

5. (4.53) を証明せよ．

6. (4.54) を証明せよ．

7. H をヒルベルト空間とする．

(i) 任意の $\Psi_1, \cdots, \Psi_N \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\|S_N(\Psi_1 \otimes \cdots \otimes \Psi_N)\|^2 = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \langle \Psi_1, \Psi_{\sigma(1)} \rangle \cdots \langle \Psi_N, \Psi_{\sigma(N)} \rangle$$

を示せ．

ヒント： $S_N^* = S_N, S_N^2 = S_N$ に注意．

(ii) 任意の $\Psi_1, \cdots, \Psi_N \in \mathsf{H}$ に対して，$\langle \Psi_i, \Psi_j \rangle$ を (i,j) 成分とする $N \times N$ 行列を $(\langle \Psi_i, \Psi_j \rangle)_{i,j=1,\cdots,N}$ で表わす．

$$\|A_N(\Psi_1 \otimes \cdots \otimes \Psi_N)\|^2 = \frac{1}{N!} \det(\langle \Psi_i, \Psi_j \rangle)_{i,j=1,\cdots,N}$$

を示せ．ただし，$\det M$ は正方行列 M の行列式を表わす．

ヒント： $A_N^* = A_N, A_N^2 = A_N$ に注意．

8. $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ をヒルベルト空間 H の CONS とする．

(i) $c_{i_1 \cdots i_n} := \|S_n(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n})\|$ とおくと，

$$c_{i_1 \cdots i_n}^2 = \frac{n_1! \cdots n_s!}{n!}$$

であることを示せ．ただし，$i_1, \cdots, i_n$ のうち，相異なるものを $j_1, \cdots, j_s$ とし，$i_1, \cdots, i_n$ のうち，j_i に等しいものの個数を n_i とする．

ヒント： 前問 (i)．

(ii) $\{c_{i_1 \cdots i_n}^{-1} S_n(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}) | i_1 \leq \cdots \leq i_n,\ i_j \in \mathbb{N}, j = 1, \cdots, n\}$ は $\otimes_{\mathrm{s}}^n \mathsf{H}$ の CONS であることを証明せよ．

(iii) $d_{i_1 \cdots i_n} := \|A_n(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n})\|$ とおくとき，

$$d_{i_1 \cdots i_n}^2 = \frac{1}{n!} \det \left(\delta_{i_j i_k}\right)_{j,k=1,\cdots,n}$$

を示せ．

ヒント： 前問 (ii)．

(iv) $\{d^{-1}_{i_1\cdots i_n}A_n(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n})|i_1<\cdots<i_n,\ i_j\in\mathbb{N}, j=1,\cdots,n\}$ は $\otimes^n_{\rm as}\mathsf{H}$ の CONS であることを証明せよ．

9. 二つの等しい 1 次元調和振動子（質量 $m>0$，角振動数 $\omega>0$）からなる量子系を CCR のシュレーディンガー表現で考える．したがって，不可弁別性の原理を要求しない場合には，状態のヒルベルト空間として，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R})\otimes\mathsf{L}^2(\mathbb{R})=\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^2)$ がとれる．二つの振動子の相互作用がポテンシャル λx_1x_2 ($x_1,x_2\in\mathbb{R}$, λ は実定数) を通してなされる場合を考える．したがって，ハミルトニアンは，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 上の演算子として，

$$H:=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_1+\frac{m\omega^2}{2}x_1^2-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_2+\frac{m\omega^2}{2}x_2^2+\lambda x_1x_2$$

によってあたえられる．ただし，Δ_j は変数 x_j に関する一般化されたラプラシアンである．演算子 H の固有値問題を次の手順によって解け．

(i) $\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)\subset\mathsf{D}(H)$ であり，H は対称演算子であることを示せ．

(ii) $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ に対して，

$$\xi:=\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}},\quad \eta:=\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}},$$

とおき，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^2)$ 上の演算子 U を

$$(U\psi)(x_1,x_2):=\psi(\xi,\eta)$$

によって定義する．このとき，U はユニタリであることを示せ．

(iii) U は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ から $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ への全単射であることを示せ．

(iv) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ 上で，

$$Ux_1U^{-1}=\xi,\quad Ux_2U^{-1}=\eta,$$
$$U\partial_1U^{-1}=\frac{\partial_1+\partial_2}{\sqrt{2}},\quad U\partial_2U^{-1}=\frac{\partial_1-\partial_2}{\sqrt{2}},$$

が成り立つことを示せ．

(v) (iv) を用いて，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ 上で，

$$UHU^{-1}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_1+\frac{m\omega_1^2}{2}x_1^2-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_2+\frac{m\omega_2^2}{2}x_2^2$$

が成り立つことを示せ．ただし，

$$\omega_1^2:=\omega^2+\frac{\lambda}{m},\quad \omega_2^2:=\omega^2-\frac{\lambda}{m}.$$

以下，

(★)　$|\lambda|<m\omega^2$

と仮定し，$\omega_j>0,\ j=1,2$ とする．

(vi) (v) と 1 次元調和振動子についてすでに確立した性質（3 章 3.8 節を参照）を用いて，H は

$$\mathcal{S}_{\text{fin}}(\mathbb{R}^2) := \mathcal{L}\left(\{f \times g | f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\}\right)$$

上で本質的に自己共役であることを示せ．

ヒント： $\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ 上の演算子として，

$$H_1 := -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_1 + \frac{m\omega_1^2}{2}x_1^2,$$
$$H_2 := -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_2 + \frac{m\omega_2^2}{2}x_2^2,$$

を導入すると，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^2) = \mathsf{L}^2(\mathbb{R}) \otimes \mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ という同一視のもとで，$\mathcal{S}_{\text{fin}}(\mathbb{R}^2)$ で作用する H は，$\mathcal{S}(\mathbb{R})\hat{\otimes}\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上で作用する演算子 $H_1 \otimes I + I \otimes H_2$ とユニタリ同値である．そこで，自己共役演算子のテンソル積の理論を応用すればよい．

(vii) H_j の規格化された固有関数系を $\{\Omega_n^{(j)}\}_{n=0}^{\infty}$ とするとき，

$$\Omega_{m,n}(x_1, x_2) := \Omega_m(\xi)\Omega_n(\eta), \quad m, n \geq 0,$$

によって定義される関数 $\Omega_{m,n}$ は，H の固有関数であり，その固有値は

$$E_{m,n} := \hbar\omega_1 m + \hbar\omega_2 n + \frac{\hbar}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

であることを示せ．

(viii) 以上の結果から，

$$\sigma(\bar{H}) = \sigma_{\text{p}}(\bar{H}) = \{E_{m,n}\}_{m,n=0}^{\infty}$$

を導け．

10. H を問題 9 の演算子とし，(★) を仮定する．

(i) H は $\mathsf{L}^2_{\text{s}}(\mathbb{R}^2) = \mathsf{L}^2(\mathbb{R}) \otimes_{\text{s}} \mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ によって簡約されることを示せ．この場合の簡約部分を H_{s} とすれば，

$$\sigma(\bar{H}_{\text{s}}) = \sigma_{\text{p}}(\bar{H}_{\text{s}}) = \{E_{m,n} | m \in \mathbb{Z}_+, n = 2k,\ k \in \mathbb{Z}_+\}$$

を証明せよ．

ヒント： $\Omega_{m,n}(x_2, x_1) = \Omega_{m,n}(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \Longleftrightarrow \Omega_n(y) = \Omega_n(-y)$, $y \in \mathbb{R}$. 一方，エルミート多項式 $H_n(x)$ は，

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x),\ x \in \mathbb{R},\ n \geq 0,$$

をみたす．

(ii) H は $\mathsf{L}^2_{\mathrm{as}}(\mathbb{R}^2) = \mathsf{L}^2(\mathbb{R}) \otimes_{\mathrm{as}} \mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ によって簡約されることを示せ．この場合の簡約部分を H_{as} とすれば，

$$\sigma(\bar{H}_{\mathrm{as}}) = \sigma_{\mathrm{p}}(\bar{H}_{\mathrm{as}}) = \{E_{m,n} | m \in \mathbb{Z}_+, n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}\}$$

を証明せよ．

ヒント： $\Omega_{m,n}(x_2, x_1) = -\Omega_{m,n}(x_1, x_2),\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \Longleftrightarrow \Omega_n(y) = -\Omega_n(-y),\ y \in \mathbb{R}$.

注意． この問題は，調和振動子をボソンと考えるかフェルミオンと考えるかによって，ハミルトニアンのスペクトル特性が異なることを示す．特に，スペクトルの下限について，

$$\inf \sigma(H_{\mathrm{s}}) = \frac{\hbar}{2}(\omega_1 + \omega_2), \quad \inf \sigma(H_{\mathrm{as}}) = \hbar\omega_2 + \frac{\hbar}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

であるから，

$$\inf \sigma(H_{\mathrm{s}}) < \inf \sigma(H_{\mathrm{as}}).$$

11. ヒルベルト空間 H 上のボソン フォック空間 $\mathcal{F}_{\mathrm{s}}(\mathsf{H})$ における生成演算子を $A(f)^*$，シーガルの場の演算子を $\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ とする．

(i) 任意の $f_j,\ g_k \in \mathsf{H},\ j = 1, \cdots, n;\ k = 1, \cdots, m$ に対して，

$$\langle A(f_1)^* \cdots A(f_n)^* \Omega, A(g_1)^* \cdots A(g_m)^* \Omega \rangle = \delta_{nm} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \langle f_1, g_{\sigma(1)} \rangle \cdots \langle f_n, g_{\sigma(n)} \rangle$$

を示せ．

ヒント： (4.92) または交換関係と $A(f)\Omega = 0$ を用いよ．

(ii) 任意の $f_j \in \mathsf{H},\ j = 1, \cdots, 2n$ に対して，

$$\langle \Omega, \Phi_{\mathrm{S}}(f_1) \cdots \Phi_{\mathrm{S}}(f_{2n-1}) \Omega \rangle = 0,$$
$$\langle \Omega, \Phi_{\mathrm{S}}(f_1) \cdots \Phi_{\mathrm{S}}(f_{2n}) \Omega \rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{\mathrm{comb}} \langle f_{i_1}, f_{j_1} \rangle \cdots \langle f_{i_n}, f_{j_n} \rangle$$

を示せ．ただし，$\sum_{\mathrm{comb}}$ は $(1, \cdots, 2n)$ の中から n 個の対 $(i_1, j_1), \cdots, (i_n, j_n)$ を $i_1 < j_1, \cdots, i_n < j_n$ となるように選ぶ仕方の全体（$(2n)!/(2^n n!)$ 通り）にわたる和を表す．

ヒント： 交換関係と $A(f)\Omega = 0$ を用いよ．

注意． 上式の左辺の量は，シーガルの場の**真空期待値**とよばれる．

(iii) 任意の $f \in \mathsf{H}$, $z \in \mathbb{C}$, $\Psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{s},0}(\mathsf{H})$ に対して,

$$e^{z\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\Psi := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_{\mathrm{S}}(f)^n \Psi}{n!} z^n$$

は収束すること，および

$$\langle \Omega, e^{z\Phi_{\mathrm{S}}(f)}\Omega \rangle = e^{z^2\|f\|^2/4}$$

を示せ．

ヒント： 収束性については，$\Psi^{(m)} \neq 0$, $\Psi^{(n)} = 0, n \neq m$, という形のベクトル Ψ について示せば十分．$\|\Phi_{\mathrm{S}}(f)^n\Psi\|$ を評価するには，命題 4.33 の不等式を用いよ．$e^{z\Phi_{\mathrm{S}}(f)}$ の真空期待値の計算には (ii) を使えばよい．

付録A 測 度 と 積 分

量子力学の数理物理を厳密な方法のもとに十全に展開するには関数解析学に代表される現代解析学の知識が不可欠である．現代解析学においては，古典解析学におけるリーマン積分の一般化であるルベーグ積分に関する理論が基本的な道具のひとつである．また，現代的確率論の方法は量子力学においても有効な方法のひとつとして用いられるが，それは抽象的な測度論に基づく積分論を基礎として築かれる．こうした事情を考慮して，この付録では，本書を自己完結的に理解しうる範囲内で，読者の便宜のために，測度論および積分論を活用する観点から，基本的概念の定義や応用上重要な定理を採録する[*1]．

A.1 ボレル集合体と測度

測度という概念はユークリッド空間における通常の図形の体積（１次元ならば長さ，２次元ならば面積）の概念をもっと一般の集合にまで拡げたものである．といっても，どんな集合に対してもそのような概念が考えられるわけではない．測度が定義されるような集合の集まりとはどんなものであるべきかをつきつめていくと，一般概念としてのボレル集合体の概念に到達する：

定義 A.1 X を空でない集合とし，B を X の部分集合からなるひとつの族とする．B が次の四つの条件を満たすとき，B を**ボレル集合体** (Borel field) という[*2]．

(i) $\emptyset \in \mathsf{B}$

(ii) $B \in \mathsf{B}$ ならば $B^c \in \mathsf{B}$ (B^c は B の補集合)

(iii) $B_1, B_2 \in \mathsf{B}$ ならば $B_1 \cap B_2 \in \mathsf{B}$

(iv) $B_n \in \mathsf{B}$ $(n = 1, 2, \cdots,)$, $B_m \cap B_n = \emptyset$ $(m \neq n)$ ならば $\cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathsf{B}$.

ボレル集合体の元を**ボレル集合** (Borel set) という．$\emptyset \in \mathsf{B}$ であるから，(ii) により $\mathsf{X} \in \mathsf{B}$ である．また，$B_n \in \mathsf{B}, n = 1, 2, 3, \cdots$, ならば $\cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathsf{B}$ が上の定義から

[*1] この付録で述べる事実に関しては，多くの場合，その証明は省略する．証明に興味のある読者は，たとえば，伊藤清三『ルベーグ積分入門』（裳華房，数学選書 4，初版 1963）を参照されたい．物理系の学生向きに書かれた，ルベーグ積分の分かりやすい教科書として，G. テンプル『ルベーグ積分』（江沢　洋・南條昌司訳，ダイヤモンド社，1981）をあげておこう．

[*2] **σ-代数**（加法族），**完全加法族**，**可算加法族**という言い方もする．

導かれる．

例 A.1 集合 X の部分集合の全体を B_{X} とすれば，これは明らかにボレル集合体である．また，X と空集合だけからなる集合族 $\{\mathsf{X}, \emptyset\}$ もボレル集合体である．

いまの例からもわかるように，集合 X のボレル集合体はひとつとは限らないことに注意しよう．

集合 X とその（ひとつの）ボレル集合体 B の対 (X, B) を**可測空間** (measurable space) とよぶ．以下に述べるように，この空間上に測度を定義するのでる．

X の部分集合からなる任意の集合族 $\mathsf{A}_0 \neq \emptyset$ があたえられたとき，これを含むボレル集合体の全体 $\mathbb{B} = \{\mathsf{B} : \text{ボレル集合体} \,|\mathsf{A}_0 \subset \mathsf{B}\}$ は空ではない．実際，$\mathsf{B}_{\mathsf{X}} \in \mathbb{B}$ である．そこで $\mathbb{B}$ に含まれるすべての B の共通部分を A とおけば，容易にわかるように，これはボレル集合体であり，しかも A_0 を含むボレル集合体のうちで最小のものである（すなわち，$\mathsf{A}_0 \subset \mathsf{B}$ となる任意のボレル集合体 B に対して $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$）．このボレル集合体 A を，$\mathsf{A}_0$ **を含む最小のボレル集合体**あるいは A_0 **によって生成されるボレル集合体**という．

例 A.2 n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ における半開区間の全体 $\{(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n] \in \mathbb{R}^n \,|\, -\infty \leq a_j < b_j \leq \infty\}$ によって生成されるボレル集合体を $\boldsymbol{n}$ **次元ボレル集合体**とよび，記号的に B^n と書く．B^n の元を $\mathbb{R}^n$ のボレル集合という．

$\mathbb{R}^n$ の開集合全体によって生成されるボレル集合体を O_n, $\mathbb{R}^n$ の閉集合全体によって生成されるボレル集合体を C_n とすれば，

$$\mathsf{B}^n = \mathsf{O}_n = \mathsf{C}_n$$

が成り立つことが知られている．したがって，$\mathbb{R}^n$ の開集合も閉集合もボレル集合である．

定義 A.2 (i) 一般に，X のボレル集合体 B から $[0, \infty]$ への写像 μ があって

(a) $\mu(\emptyset) = 0$

(b) $B_n \in \mathsf{B}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, $B_m \cap B_n = \emptyset$ $(m \neq n)$ ならば，$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$ （**完全加法性**）

がみたされるとき，μ を (X, B) 上の**測度** (measure) という．三つ組 $(\mathsf{X}, \mathsf{B}, \mu)$ を**測度空間** (measure space) という．B を特に示す必要がない場合は，これを (X, μ) と書く．

(ii) $\mu(B) < \infty$ となる $B \in \mathsf{B}$ を $\boldsymbol{\mu}$ **測度有限な集合**とよぶ．X が μ 測度有限な集合の可算個の和集合になっている場合，すなわち，

$$\mathsf{X} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathsf{X}_n, \quad \mathsf{X}_n \in \mathsf{B}, \quad \mu(\mathsf{X}_n) < \infty,\ n = 1, 2, \cdots,$$

をみたす $\mathsf{X}_n \in \mathsf{B}$ が存在するとき，μ を **σ-有限な測度**とよび，測度空間 $(\mathsf{X}, \mathsf{B}, \mu)$ は **σ-有限**であるという．

(iii) $\mu(\mathsf{X}) < \infty$ ならば，μ を (X, B) 上の**有界な測度**とよび，$(\mathsf{X}, \mathsf{B}, \mu)$ を**有界な測度空間**という．

上の定義からわかるように，有界な測度空間は σ-有限である．

本書では，簡単のため，測度空間といえば，σ-有限な測度空間をさすものとする．

$(\mathsf{X}, \mathsf{B}, \mu)$ を測度空間とすれば，$A \subset B$ をみたす任意の $A, B \in \mathsf{B}$ に対して $\mu(A) \leq \mu(B)$ が成り立つ（$B = (B \backslash A) \cup A$ と考えて，定義 A.2(ii) を使え）．これを測度の**単調性**という．

例 A.3 $\mathbb{R}^n$ における，互いに共通部分をもたない，有限個の半開区間の和集合の全体を $\mathfrak{I}_n$ としよう．写像 $\mu_L^n : \mathfrak{I}_n \to [0, \infty]$ を次のように定義する．まず，

$$\mu_L^n((a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$$

とし（これは "図形"$(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]$ の通常の意味での "体積"をあたえる），互いに共通部分をもたない半開区間 $E_j, j = 1, \cdots, m$ の和集合に対しては

$$\mu_L^n(\cup_{j=1}^m E_j) := \sum_{j=1}^{m} \mu(E_j)$$

とする．これをもとにして，$B \in \mathsf{B}^n$ に対しては

$$\mu_L^n(B) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_L^n(E_k) \middle| B \subset \cup_{k=1}^{\infty} E_k, E_k \in \mathfrak{I}_n \right\}$$

によって，$\mu_L^n(B)$ を定義する（右辺は，B を $\mathfrak{I}_n$ の元の和集合で覆うすべての仕方に関する下限）．こうして定義される，B^n から $[0, \infty]$ への写像 μ_L^n は測度になることが示される．この測度を n 次元の**ルベーグ (Lebesgue) 測度**とよぶ．

測度空間 $(\mathsf{X}, \mathsf{B}, \mu)$ において，$\mu(B) = 0$ となる集合 $B \in \mathsf{B}$ を測度 μ に関する**零集合** (null set) とよぶ．

たとえば，$\mathbb{R}$ における離散的集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ はルベーグ測度に関して零集合である．実際，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$B_{j,\varepsilon} = (a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon]$ とすれば

$$\mu_L^1(\{a_1, \cdots, a_n\}) = \sum_{j=1}^{n} \mu_L^1(\{a_j\}) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu_L^1(B_{j-\varepsilon}) = 2n\varepsilon$$

であるから，$\varepsilon \downarrow 0$ として，$\mu_L^1(\{a_1, \cdots, a_n\}) = 0$. 同様に，$\mathbb{R}^n$ において可算無限個の点からなる集合はルベーグ測度に関して零集合である．なお，連続体の濃度をもつ零集合も存在することを注意しておこう[*3].

$(\mathbb{R}^n, \mathsf{B}^n)$ 上の測度 μ に対して，$\mu(B) = 0$ となる最大の開集合 B の補集合 B^c を測度 μ の**台** (support) とよび，$\mathrm{supp}\,\mu$ という記号で表わす.

例 A.4 n 次元ルベーグ測度 μ_L^n の場合は，空でないどんな開集合 B に対しても，$\mu_L^n(B) > 0$ であるので，$\mathrm{supp}\,\mu_L^n = \mathbb{R}^n$ となる[*4].

例 A.5 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ $(-\infty < a < b < \infty)$ とし，μ_L を 1 次元ルベーグ測度としよう．任意の $B \in \mathsf{B}^1$ に対して，$\nu(B) \geq 0$ を

$$\nu(B) = \mu_L([a, b] \cap B)$$

によって定義すれば，ν は $\mathbb{R}$ 上の測度である．しかも，$\nu(\mathbb{R}) = \mu_L([a, b]) = b - a$ であるから，ν は $\mathbb{R}$ 上の有界な測度である．$\mathrm{supp}\,\nu = [a, b]$ であることも容易にわかる.

例 A.6 $\{a_n\}_{n=1}^N \subset \mathbb{R},\ \lambda_n > 0,\ n = 1, \cdots, N,$ とし，$B \in \mathsf{B}^1$ に対して

$$\nu(B) = \begin{cases} \sum_{a_n \in B}^N \lambda_n & ;\ \{a_n\}_{n=1}^N \cap B \neq \emptyset \text{ のとき} \\ 0 & ;\ \{a_n\}_{n=1}^N \cap B = \emptyset \text{ のとき} \end{cases}$$

を定義する．ただし，$\sum_{a_n \in B}^N$ は a_n が B にはいるような n についての和を表わす．このとき，ν は $(\mathbb{R}, \mathsf{B}^1)$ 上の測度である．容易にわかるように，$\mathrm{supp}\,\nu = \{a_n\}_{n=1}^N$. この型の測度を，点 $a_1, \cdots, a_n$ に質量をもつ**デルタ測度** (delta measure) とよび，記号的に，

$$d\nu(x) = \sum_{n=1}^N \lambda_n \delta(x - a_n) dx$$

と表わす.

A.2 可測関数と積分

関数の積分という概念は抽象的な形では，ある関数のクラスから複素数全体への線形な写像，すなわち，線形汎関数としてとらえることができる．古典解析学における

---

*3 たとえば，**カントール集合**とよばれる集合はそのような集合である．伊藤清三『ルベーグ積分入門』（裳華房，数学選書 4，初版 1963）の §7 を参照.

*4 開集合は開球を含み，開球のルベーグ測度は 0 でないことに注意（$\mathbb{R}^n$ の開球は必ず，$\underbrace{(a, b] \times \cdots \times (a, b]}_{n}(a < b)$ という形の集合を含む）.

リーマン積分は，たとえば，閉区間 $[a,b]$ 上の複素数値連続関数全体の上の線形汎関数である．これから述べるルベーグ積分は，可測空間 (X,B) 上に測度があたえられたとき，X 上のあるクラスの関数に対して定義される線形汎関数である．ルベーグ積分は，関数の積分という概念を非常に深いレヴェルにおいてとらえたものである．

$(\mathsf{X},\mathsf{B},\mu)$ を測度空間，f を X 上の関数で実数値または $\pm\infty$ をとるものとする．任意の実数 a に対して，$\{x \in X | a < f(x)\} \in \mathsf{B}$ となるとき，f を **B-可測関数** (measurable function) または**ボレル可測関数**という．B を書かなくても誤解の余地がなければ，単に可測関数という．f が複素数値関数のときは，その実部および虚部が可測関数ならば，f は可測であるという．

例 A.7 $\mathbb{R}^n$ 上の連続関数は B^n-可測である．なぜなら，f を $\mathbb{R}^n$ 上の連続関数とすれば，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$\{x \in \mathbb{R}^n | a < f(x)\}$ は開集合であり，開集合はボレル集合だからである．

空でない集合 X の部分集合 B に対して，

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in B \text{ のとき} \\ 0 & ; x \notin B \text{ のとき} \end{cases} \tag{A.1}$$

によって定義される関数 χ_B を集合 B の**定義関数** (characteristic function) あるいは**特性関数**という．$B \in \mathsf{B}$ ならば，χ_B は可測である．$B_j \in \mathsf{B}, j = 1, \cdots, n, B_j \cap B_k = \emptyset\ (j \neq k)$ があって，

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{B_j} \quad (\alpha_j \text{は複素数}) \tag{A.2}$$

という形に表わされる関数 f を**単純関数** (simple function) あるいは**階段関数** (step function) という．

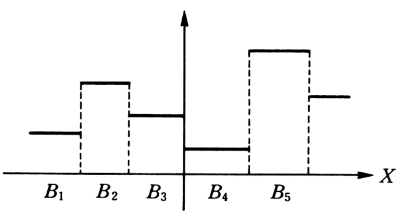


図 **A.1** 階段関数

このような関数 f に対して，測度 μ に関する積分 $\int_{\mathsf{X}} f d\mu$ を

$$\int_{\mathsf{X}} f d\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(B_j)$$

によって定義する（右辺の量は f を (A.2) のように表わす仕方に依存しないことが示される）.

次に f が可測で $f \geq 0$ の場合は，各点 $x \in \mathsf{X}$ で $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ となる単純関数の非減少列 $\{f_n\}_n$ がとれる．たとえば，

$$\begin{aligned} B_{n,k} &= \left\{ x \in X \left| \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right. \right\},\ k = 1, \cdots, 2^n n \\ B_n &= \{x \in X | f(x) \geq n\}, \end{aligned}$$

とし，

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{B_{n,k}}(x) + n\chi_{B_n}(x)$$

とすればよい．これは，リーマン積分を定義するときとは違って，関数 f を “水平に切って”，有限和で近似するという発想である．図 A.2 参照.

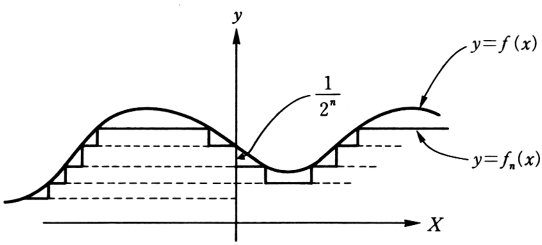


図 **A.2**　関数 f_n

この事実をもとにして，f の μ に関する積分を

$$\int_{\mathsf{X}} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathsf{X}} f_n d\mu \tag{A.3}$$

によって定義する．右辺は単調非減少であるから，確かにその極限は $+\infty$ も含めて存在する．右辺の極限が，f を近似する，単調非減少な階段関数列の選び方によらないことも示される．この値が有限のとき f は μ に関して**積分可能** (integrable)，あるいは**可積分**であるという.

可測関数 f が実数値の場合は，

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}, \tag{A.4}$$

とすれば，$f_\pm \geq 0$ であって，

$$f = f_+ - f_- \tag{A.5}$$

と書けることを利用する．f_+, f_- を，それぞれ，f の**非負部分**，**非正部分**という．$f_\pm$ に対しては，前段の結果より，$\int_{\mathsf{X}} f_+ d\mu$, $\int_{\mathsf{X}} f_- d\mu$ が定義されるので，このうちの少なくとも一方が有限のとき，f の μ に関する積分を

$$\int_{\mathsf{X}} f d\mu := \int_{\mathsf{X}} f_+ d\mu - \int_{\mathsf{X}} f_- d\mu \tag{A.6}$$

によって定義する．積分 $\int_{\mathsf{X}} f_+ d\mu$, $\int_{\mathsf{X}} f_- d\mu$ の両方とも有限のとき，f は μ に関して**積分可能**あるいは**可積分**であるという．この積分の定義にしたがえば，f が可積分であることと $|f|$ が可積分であることは同値である（広義リーマン積分の場合との違いに注意）．

可測関数 f が複素数値のときは，$f = f_1 + if_2$（f_1, f_2 はそれぞれ，f の実部と虚部）と表わされるので，f_1, f_2 が可積分のときに限り，f の μ に関する積分を

$$\int_{\mathsf{X}} f d\mu = \int_{\mathsf{X}} f_1 d\mu + i \int_{X} f_2 d\mu \tag{A.7}$$

によって定義する．X の部分可測集合 $E \in \mathsf{B}$ の上の積分は

$$\int_E f d\mu = \int_{\mathsf{X}} \chi_E f d\mu \tag{A.8}$$

によって定義する．

積分の定義から，任意の $E \in \mathsf{B}$ と零集合 $N \in \mathsf{B}$ に対して，

$$\int_N f d\mu \;=\; 0, \tag{A.9}$$

$$\int_{E \cup N} f d\mu \;=\; \int_E f d\mu \tag{A.10}$$

が成り立つことは容易にわかる．(A.10) 式は，積分範囲に零集合を加えても積分の値は変化しないことを示す．

積分変数を明示したいときは，$\int_E f d\mu = \int_E f(x) d\mu(x)$ のように書く．また，X 全体での積分は単に $\int f d\mu$ と書くこともある．こうして，測度空間 $(\mathsf{X}, \mathsf{B}, \mu)$ 上の可測関数に対して積分が定義される．この方式によって定義される積分を**ルベーグ式積分** (Lebesgue integral) あるいは単に**ルベーグ積分**という．

$\mathsf{X} = \mathbb{R}^n$ で μ がルベーグ測度 μ_L^n の場合の積分を $\boldsymbol{n}$ **次元ルベーグ積分**とよぶ．ボレル集合 $E \in \mathsf{B}^n$ の上の n 次元ルベーグ積分 $\int_E f d\mu_L^n$ は，しばしば，より簡潔に，

$$\int_E f(x) dx$$

と書かれる．

$\mathbb{R}^n$ の可算個の点からなる集合のルベーグ測度は 0 であるから，(A.10) によって，たとえば，任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\int_{(a,b]} f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{[a,b)} f(x)dx$$

が成り立つ．

ルベーグ積分の一般的性質を述べる前に言葉をひとつ定義する．$(\mathsf{X}, \mathsf{B}, \mu)$ を測度空間とし，各点 $x \in \mathsf{X}$ ごとに定まる命題 $P(x)$ があるとする．ある零集合 N（すなわち，$\mu(N) = 0$ なる可測集合 N）が存在し，任意の $x \in \mathsf{X} \setminus N$ に対して命題 $P(x)$ が成立するとき，命題 $P(x)$ は，測度 μ に関して**ほとんどいたるところ** (almost everywhere) **成立する**といい，$P(x)\quad \mu$-a.e. あるいは $P(x)\quad \mu$-a.e.x などと記す．どの測度で考えているかが文脈から明らかな場合は，μ-a.e. を単に a.e. と記す．しかし,「$P(x)\quad \mu$-a.e.」であっても，別の測度 ν に関しては,「$P(x)\quad \nu$-a.e.」とは限らないから，どの測度で考えているかは常に注意を要する．

例 A.8　二つの可測関数 f, g がある零集合 N に属する点以外のすべての点で等しいとき，すなわち，$\mu(N) = 0$ で，$f(x) = g(x), \quad x \in \mathsf{X} \setminus N$, が成立するならば，$f$ と g は測度 μ に関してほとんどいたるところ等しいといい，$f(x) = g(x)$, μ-a.e.x, または（測度 μ に関わっていることは了解されているとして）単に $f(x) = g(x)$, a.e.x と記す．この場合の零集合 N は，もちろん，f, g に依存しながら決まっている．

たとえば，$\mathbb{R}$ 上の関数

$$f_{\mathrm{D}}(x) = \begin{cases} 1 & ; x \text{ が有理数のとき} \\ 0 & ; x \text{ が無理数のとき} \end{cases}$$

—**ディリクレ** (P. G. Dirichlet) **関数**とよばれる[*5]—はボレル可測であるが，有理数全体は可算無限個の集合であり，可算無限個の集合のルベーグ測度は 0 であるから，1 次元ルベーグ測度に関して $f_{\mathrm{D}}(x) = 0$, a.e.x である．

例 A.9　f, g が X 上の実数値関数で，ある零集合 N が存在して，

$$g(x) < f(x), \quad x \in \mathsf{X} \setminus N,$$

が成り立つならば，$f(g)$ は，測度 μ に関してほとんどいたるところ $g(f)$ よりも大きい（小さい）といい，$g(x) < f(x), \quad \mu$-a.e.x, と記す．

例 A.10　ある零集合 N が存在して $|f(x)| < \infty, \quad x \in \mathsf{X} \setminus N$, ならば，$f$ は μ に関してほとんどいたるところ有限であるといい，$|f(x)| < \infty, \quad \mu$-a.e.$x$, と記す．

---

*5　$f_{\mathrm{D}}(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{k\to\infty} (\cos n!\pi x)^{2k} \right)$.

例 A.11　ある定数 $C > 0$ と零集合 N があって，$|f(x)| \le C, \quad x \in \mathsf{X} \setminus N$, ならば，$f$ は測度 μ に関して**本質的に有界** (essentially bounded) であるといい，$|f(x)| \le C, \quad \mu$-a.e.x, と記す．この場合，

$$\|f\|_\infty := \text{ess.sup}|f(x)| := \sup_{x \in X \setminus N} |f(x)| \tag{A.11}$$

を f の**本質的上限** (essential supremum) とよぶ．

注意　f が μ に関して本質的に有界ならば，それは μ に関してほとんどいたるところ有限であるが，この逆は必ずしも成り立たない．たとえば，$\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = 1/|x|$ はボレル可測であり，$N = \{0\}$ 以外の点では有限である ($f(0) = +\infty$)．一方，この N のルベーグ測度は 0 である．したがって，$1/|x|$ はルベーグ測度に関してほとんどいたるところ有限である．しかし，これは，ルベーグ測度に関しては本質的に有界な関数ではない．

測度空間 $(\mathsf{X}, \mathsf{B}, \mu)$ におけるルベーグ積分の基本的な性質は次の定理にまとめられる．

定理 A.3　(i) $g(x) \le f(x)$, a.e.x で f, g が可積分ならば，$\int_{\mathsf{X}} g d\mu \le \int_{\mathsf{X}} f d\mu$.

(ii) f, g が可積分ならば，任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して $\alpha f + \beta g$ は可積分であり

$$\int_{\mathsf{X}} (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_{\mathsf{X}} f d\mu + \beta \int_{\mathsf{X}} g d\mu.$$

(iii) f が可積分ならば，f はほとんどいたるところ有限であり，$\left|\int_{\mathsf{X}} f d\mu\right| \le \int_{\mathsf{X}} |f| d\mu$.

(iv) $f(x) = g(x)$, a.e.x で，f が可積分ならば g もそうであって，$\int_{\mathsf{X}} f d\mu = \int_{\mathsf{X}} g d\mu$.

上の (i) の応用として，$f \ge 0$ a.e.x のとき，$E, F \in \mathsf{B}, E \subset F$ ならば，

$$0 \le \int_E f d\mu \le \int_F f d\mu \tag{A.12}$$

が成り立つ（$\chi_E(x) f(x) \le \chi_F(x) f(x)$, a.e.$x \in \mathsf{X}$ による）．

注意　定理 A.3(iv) は次のことを意味する：可積分関数については，零集合上の値は積分値に影響をあたえない．つまり，零集合上での関数値が何であるかは全然重要ではない．したがって，積分を考える可測関数は，X のすべての点で定義されていると考える必要はなく，ほとんどいたるところの点で定義されているとして十分である．この見方はたいへん便利である．たとえば，関数 $1/x, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ は，$\mathbb{R}$ 上の関数とみなすには，$x = 0$ の値を決めてやらねばならないが，集合 $\{0\}$ はルベーグ測度 μ_L^1 について零集合であるから，μ_L^1 に関する限り，$1/x$ はほとんどいたるところ定義された関数と見なされ，$x = 0$ での値を問題にすることなく，μ_L^1 についての積分を考察できる．

ルベーグ積分とリーマン積分との関係は次の定理であたえられる．

定理 A.4 (i) $\mathbb{R}^n$ の中の有界集合 $E = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ で $f(x)$ が連続ならば，E 上での f のルベーグ積分は E 上での f のリーマン積分に等しい．

(ii) $\mathbb{R}^n$ の中の開集合 F（無限区間でもよい）で $f(x)$ は連続で非負，かつ広義リーマン積分可能ならば，f は F でルベーグ積分可能であり，この二つの積分の値は等しい．

注意 (1) (ii) において，f が非負でない場合は，f が広義リーマン積分可能でもルベーグ積分可能であるとは限らない．たとえば，関数 $f(x) = \sin x/x$ に対して，半無限区間 $(0, \infty)$ における広義リーマン積分は存在するが，ルベーグ積分は存在しない．

(2) 例 A.8 のディリクレ関数 f_{D} は任意の有界閉区間 $[a, b]$ の上でリーマン積分可能ではない*6．だが，それはルベーグ積分可能であり，$\int_{[a,b]} f_{\mathrm{D}}(x)dx = 0$ となる．

A.3 極限定理

この節では，測度空間 $(\mathsf{X}, \mathsf{B}, \mu)$ 上の関数の積分に関して，応用上重要な極限定理を述べる．

定理 A.5 単調収束定理 (monotone convergence theorem). $f_n \geq 0$ は可積分関数で，a.e.$x \in X$ に対して $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots$ が成り立つとする（したがって，$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, a.e.$x$, が ∞ の値も許して存在する）．このとき，f が可積分であるための必要十分条件は $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathsf{X}} f_n d\mu$ が有限となることである．この場合，

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathsf{X}} f_n d\mu = \int_{\mathsf{X}} f d\mu$$

が成り立つ．

定理 A.6 ルベーグの優収束定理 (Lebesgue dominated convergence theorem). $f_n, n = 1, 2, \cdots$, は可積分関数,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \text{a.e.}x,$$

とする．さらに，

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \text{a.e.}x, n = 1, 2, \cdots,$$

*6 たとえば，小松勇作『解析概論 [I]』（廣川書店，初版 1962）の §42 を参照．

をみたす可積分関数 g が存在するとしよう．このとき，f は可積分であって

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathsf{X}} f_n d\mu = \int_{\mathsf{X}} f d\mu.$$

この定理は積分と極限の順序交換が可能であるための十分条件をあたえるものであり，応用上，極めて強力な道具になる．リーマン積分の場合の対応する定理よりもずっと使いやすい形になっている．

定理 A.7　ファトゥー (P. Fatou) の補題．$\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu < \infty$ をみたす非負の可積分関数列 $\{f_n\}_n$ $(f_n \geq 0)$ に対して，

$$\int_{\mathsf{X}} \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_{\mathsf{X}} f_n d\mu.$$

が成り立つ．

この定理は，極限関数が可積分であることを示す場合に有用である．

A.4　積分と微分の順序交換

応用上，被積分関数 f がパラメーターを含んでいる場合が現われる．たとえば，f が実数パラメーター t を含む場合を考えてみよう．この場合，そのような被積分関数の積分 $F = \int_{\mathsf{X}} f d\mu$ は t の関数となる．問題は，どのような条件があれば，F をパラメーター t で微分したもの dF/dt と f を t で偏微分した関数を積分したもの $\int_{\mathsf{X}} \partial f/\partial t d\mu$ が等しくなるかである．ひとつの十分条件が次の定理であたえられる．

定理 A.8　$(\mathsf{X}, \mathsf{B}, \mu)$ を測度空間とする．$f(x,t)$ を $\mathsf{X}\times(a,b)$ 上の関数とし，$f(x,t)$ は，t を固定するとき，x の関数としては可積分，また，a.e.x に対して，t の関数として微分可能であるとする．さらに，積分可能な関数 $g(x)$ が存在して

$$\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right| \leq g(x), \quad \text{a.e.}x, \quad t\in(a,b),$$

がみたされているとする．このとき，積分 $\int_{\mathsf{X}} f(x,t)d\mu$ は t の関数として微分可能であり

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathsf{X}} f(x,t)d\mu = \int_{\mathsf{X}} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}d\mu$$

が成り立つ．

A.5　フビニの定理

二つの測度空間 $(\mathsf{X}, \mathsf{B}_{\mathsf{X}}, \mu)$, $(\mathsf{Y}, \mathsf{B}_{\mathsf{Y}}, \nu)$ があたえられたとき，B_{X} の元と B_{Y} の元からつくられる矩形集合の全体

$$\{A \times B \subset X \times Y | A \in \mathsf{B}_{\mathsf{X}}, B \in \mathsf{B}_{\mathsf{Y}}\}$$

を含む最小のボレル集合体を $\mathsf{B}_{\mathsf{X}} \otimes \mathsf{B}_{\mathsf{Y}}$ で表わす．次の定理は，μ, ν から，可測空間 $(\mathsf{X} \times \mathsf{Y}, \mathsf{B}_{\mathsf{X}} \otimes \mathsf{B}_{\mathsf{Y}})$ 上に“自然な”測度が定義されることを示すものである．

定理 A.9　$(\mathsf{X} \times \mathsf{Y}, \mathsf{B}_{\mathsf{X}} \otimes \mathsf{B}_{\mathsf{Y}})$ 上の測度 $\mu \otimes \nu$ で

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \quad A \in \mathsf{B}_{\mathsf{X}}, B \in \mathsf{B}_{\mathsf{Y}},$$

をみたすものがただひとつ存在する．この測度を μ と ν の**直積測度** (product measure) とよぶ．

関数 $f : \mathsf{X} \times \mathsf{Y} \to \mathsf{R}$ が $\mathsf{B}_{\mathsf{X}} \otimes \mathsf{B}_{\mathsf{Y}}$-可測ならば，直積測度 $\mu \otimes \nu$ による積分 $\int_{\mathsf{X}\times\mathsf{Y}} f d(\mu \otimes \nu)$ が考えられる．これが，たとえば

$$\int_{\mathsf{X}} \left(\int_{\mathsf{Y}} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

という累次積分に等しいことがわかれば都合がよい．これに対する十分条件をあたえるのが次のフビニ (G. Fubini) の定理であって，理論上も応用上も非常に重要な役割を演じる．

まず，次の事実を注意しておく．f を上のようなものとすれば，任意の $x \in \mathsf{X}$ に対して，関数 $y \to f(x, y)$ は B_{Y}-可測である．もし，すべての $x \in \mathsf{X}$ に対して，関数 $f(x, \cdot)$ が ν 関して可積分ならば，$x \to \int_{\mathsf{Y}} f(x, y) d\nu(y)$ は B_{X}-可測である．

定理 A.10　フビニの定理． f を $\mathsf{B}_{\mathsf{X}} \otimes \mathsf{B}_{\mathsf{Y}}$-可測関数とする．このとき，$f$ が測度 $\mu \otimes \nu$ に関して可積分であるための必要十分条件は，

$$\int_{\mathsf{X}} \left(\int_{\mathsf{Y}} |f(x, y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty \tag{A.13}$$

が成立することである．この場合，

$$\int_{\mathsf{Y}} \left(\int_{\mathsf{X}} |f(x, y)| d\mu(x) \right) d\nu(y) < \infty \tag{A.14}$$

であって，

$$\int_{\mathsf{X}\times\mathsf{Y}} f(x,y)d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_{\mathsf{X}}\left(\int_{\mathsf{Y}} f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_{\mathsf{Y}}\left(\int_{\mathsf{X}} f(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y)$$

が成り立つ．

注意　上の定理で，(A.13) は，μ と ν の役割を交換したもので置き換えることができる．この場合，(A.14) も μ と ν の役割を交換したものになる．

A.6　特異性と絶対連続性

可測空間 (X,B) に二つの測度 μ,ν があたえられた場合，これらを比較する概念が存在する．

$\mu(B)=0,\ \nu(\mathsf{X}\setminus B)=0$ をみたす集合 $B\in\mathsf{B}$ が存在するとき，ν は μ について**特異** (singular) であるという．

例 A.12　ν を例 A.6 のものとする．このとき，$\nu(\mathbb{R}\setminus\{a_n\}_{n=1}^N)=0$. 一方，$\mu_L^1$ を 1 次元ルベーグ測度とすれば，$\mu_L^1(\{a_n\}_{n=1}^N)=0$. ゆえに，$\nu$ は μ_L^1 について特異である．すなわち，デルタ測度はルベーグ測度について特異である．

可測集合 $B\in\mathsf{B}$ について，$\mu(B)=0$ ならば $\nu(B)=0$ が成り立つとき，ν は μ に関して**絶対連続** (absolutely continuous) であるという．この絶対連続性という概念は次の定理によって特徴づけられる．

定理 A.11　ラドン (J. Radon)-ニコディム (O. M. Nikodým) **の定理**．ν が μ に関して絶対連続であるための必要十分条件は，非負の可測関数 f が存在して，すべての $B\in\mathsf{B}$ に対して，$\nu(B)=\int_B f(x)d\mu(x)$ が成立することである．f は零集合上の値を除いて一意的にきまる．

この定理にいう関数 f は，ν の μ に関する**ラドン-ニコディム導関数**とよばれる．

次に述べる測度の分解定理も重要である．

定理 A.12　**ルベーグの分解定理**．μ,ν を (X,B) 上の任意の σ-有限な測度とする．このとき，μ について絶対連続な測度 ν_{ac} と特異な測度 ν_{sing} があって，$\nu=\nu_{\mathrm{ac}}+\nu_{\mathrm{sing}}$ と分解される．この分解は一意的である．

絶対連続性に関連して，積分変数の変換公式を述べておこう．(X,B) を可測空間とする．各 $B\in\mathsf{B}$ に対して，複素数値 $\Phi(B)$（∞ は含まれない）が対応し，$B=\cup_{n=1}^{\infty}B_n, B_n\cap B_m=\emptyset(n\neq m)$ ならば，$\Phi(B)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(B_n)$（完全加法性）が成り立つとき，$\Phi$ を (X,B) 上の**加法的集合関数** (completely additive set function) という．たとえば，(X,B) の有界な測度は (X,B) 上の加法的集合関数である．加法的集合関数は，有界な測度の概念の一般化とみることができる．

f を測度空間 $(\mathsf{X},\mathsf{B},\mu)$ 上の可積分関数とすれば

$$\Phi_f(B)=\int_B f(x)d\mu(x),\quad B\in\mathsf{B}, \tag{A.15}$$

によって定義される Φ は (X,B) 上の加法的集合関数ある．この加法的集合関数に関する積分が次のように定義される．まず，

$$\begin{aligned} f &= g+ih,\quad g=\mathrm{Re}\, f,\ h=\mathrm{Im}\, f,\\ g &= g_+-g_-,\quad h=h_+-h_-, \end{aligned}$$

と書けることに注意すれば (g_+,g_- は g の非負部分，非正部分；$h_\pm$ についても同様)，

$$\Phi_f(B)=\Phi_{g_+}(B)-\Phi_{g_-}(B)+i(\Phi_{h_+}(B)-\Phi_{h_-}(B)) \tag{A.16}$$

と書き直せる．一方，$f\geq 0$ ならば，Φ_f は測度であり，しかも，μ について絶対連続である．したがって，任意の B-可測関数 F に対して，積分 $\int_{\mathsf{X}}F(x)d\Phi_f(x)$ が定義される．そこで，一般の f に対しては，(A.16) に基づいて，

$$\begin{aligned} \int_{\mathsf{X}}F(x)d\Phi_f(x) &= \int_{\mathsf{X}}F(x)d\Phi_{g_+}(x)-\int_{\mathsf{X}}F(x)d\Phi_{g_-}(x)\\ &\quad +i\int_{\mathsf{X}}F(x)d\Phi_{h_+}(x)-i\int_{\mathsf{X}}F(x)d\Phi_{h_-}(x) \end{aligned} \tag{A.17}$$

によって，積分 $\int_{\mathsf{X}}F(x)d\Phi_f(x)$ を定義する．この場合，(A.17) の右辺のそれぞれの積分が有限のとき，F は Φ_f に関して**可積分**であるという．

定理 A.13　積分変数の変換． $(\mathsf{X},\mathsf{B},\mu)$ を測度空間とする．f,g を可測関数とし，f, fg は可積分であるとする．このとき，g は Φ_f に関して可積分であり，

$$\int_{\mathsf{X}}g(x)d\Phi_f(x)=\int_{\mathsf{X}}g(x)f(x)d\mu(x)$$

が成り立つ．

A.7　累乗可積分関数の空間

$(\mathsf{X}, \mathsf{B}, \mu)$ を測度空間とし，f を B-可測関数とする．ある正数 p があって関数 $|f(x)|^p$ が μ について可積分であるとき，すなわち，$\int_{\mathsf{X}} |f(x)|^p d\mu(x) < \infty$ が成り立つとき，f は μ について **p 乗可積分**であるという．p 乗可積分な関数の全体を $\mathcal{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ で表わす．X 上の本質的に有界な関数の全体を $\mathcal{L}^\infty(\mathsf{X}, d\mu)$ で表わす．

$1 \le p < \infty$ ならば，任意の $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ に対して不等式

$$\left(\int_{\mathsf{X}} |f(x)+g(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \le \left(\int_{\mathsf{X}} |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} + \left(\int_{\mathsf{X}} |g(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \tag{A.18}$$

が成り立つ．これを**ミンコフスキー**（Minkowski）**の不等式**という*7．任意の複素数 α に対して，$\alpha f \in \mathcal{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ であることは明らかである．これらの事実は，$\mathcal{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ が複素ベクトル空間になっていることを意味する．

任意の $f \in \mathcal{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ に対して，$\|f\|_p$ を

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathsf{X}} |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \quad (1 \le p < \infty) \tag{A.19}$$

によって定義する．$p = \infty$ のとき，すなわち，$\|f\|_\infty$ は (A.11) によって定義される．このとき，(A.18) と $\|\cdot\|_\infty$ の性質により，

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p, \quad f, g \in \mathcal{L}^p(\mathsf{X}, d\mu), \tag{A.20}$$

が成立する．これは **3 角不等式**とよばれる．容易にわかるように，任意の複素数 α に対して，$\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$．さらに，

$$\|f\|_p = 0 \Longrightarrow f(x) = 0, \quad \mu\text{-a.e.}x, \tag{A.21}$$

が成立する．

本文の第 1 章 1.2.6 項において，ノルム空間の概念が導入されている．対応 $f \to \|f\|_p$ に関して，上に示した性質は，$\|\cdot\|_p$ が，1.2.6 項の (N.1) を除く，ノルムの性質をすべてもっていることを示す [(A.21) だけからは，$f = 0$ と結論できないことに注意]．$\mathcal{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ をノルム空間とみなすには，(A.21) に注目して，この空間に，次の

*7　証明については，たとえば，伊藤清三『ルベーグ積分入門』（裳華房，数学選書 4，12 版，1974）の §22，pp.165–166 を参照．

相等の関係を定義する．すなわち，$f, g \in \mathcal{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ が $f(x) = g(x)$, μ-a.e.x をみたすならば，f と g は同じものとみなし，$f = g$ と書く．**この同一視を付与して考えた $\mathcal{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ を $\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ と記す**．定理 A.3(iv) によって，$f(x) = g(x)$, μ-a.e.x ならば，$\|f\|_p = \|g\|_p$ であるから，いま述べた相等の関係はノルムの相等と整合的である．また，$\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ においては，ノルムの正定値性，すなわち，$f \in \mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ について，$\|f\|_p = 0 \Longrightarrow f = 0$ も保証される．したがって，$\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ は，$\|\cdot\|_p$ をノルムとするノルム空間になる．$f \in \mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ に対して，$\|f\|_p$ を f の **L^p ノルム**という．なお，どの測度空間に関する L^p ノルムであるかを明確にするときは，$\|f\|_p$ を $\|f\|_{\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)}$ と書く．

注意 いま述べた同一視についてもっと厳密に述べるならば次のようになる．空間 $\mathcal{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ には，$f(x) = g(x)$, μ-a.e.$x \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f \sim g$ によって，同値関係 $\sim$ が定義される．したがって，この同値関係によって，$\mathcal{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ の元を類別できる．この類別を行なうことが，上述の相等の関係を導入することに他ならない．こうして得られる同値類の全体を $\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ で表わすのである．元 $f \in \mathcal{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ が属する同値類を $[f]$ と書き，そのノルムを

$$\|[f]\|_p = \left(\int_{\mathsf{X}} |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}$$

によって定義する．定理 A.3(iv) のおかげで，右辺は，同値類 $[f]$ の代表元 f の選び方に依存しないのでこの定義は意味をもつ．記法の慣用上，関数 $f \in \mathcal{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ の同値類 $[f] \in \mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ も同じ記号 f で表わす．だが，$\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ の元は**同値類であって，もはや関数ではない**，という事実は常に心に留めて置くべきである．

ノルム空間 $\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ の点列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$f \in \mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ があって，$\|f_n - f\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つとき，「$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に L^p **収束**する」あるいは「$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に**平均 p 乗収束する**」という．

特に，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に平均 2 乗収束する場合，すなわち，

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathsf{X}} |f_n(x) - f(x)|^2 d\mu(x) = 0$$

が成立するとき，このことを記号的に

$$f = \text{l.i.m.}_{n\to\infty} f_n \tag{A.22}$$

と表わす（「l.i.m.」は “limit in mean” の略）．

ノルム空間 $\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ がいつ無限次元になるかについては次の命題がある：

命題 A.14 $X_n \in \mathsf{B}, 0 < \mu(X_n) < \infty, X_n \cap X_m = \emptyset, n \neq m$, をみたす可算無限個の $X_n, n = 1, 2, \cdots$, が存在すれば，$\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ は無限次元である．

証明 いまの場合，$f_n = \chi_{X_n}$（X_n の定義関数）とおけば，$\int_{\mathsf{X}} |f_n(x)|^p d\mu(x) = \mu(X_n) < \infty$ であるから，$f_n \in \mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ であり，任意の N に対して，$f_1, \cdots, f_N$ は一次独立であることがわかる． □

注意 X が有限個の点からなる場合には，X 上の関数の全体がつくるベクトル空間は有限次元であるので，$\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ も有限次元である．

ノルム空間 $\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ の点列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は，

$$\|f_n - f_m\|_p \to 0 (n, m \to \infty)$$

をみたすとき，**基本列**あるいは**コーシー列**とよばれる．これは，厳密に述べれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 n_0 が存在して，$n, m \geq n_0$ ならば，$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$ が成り立つような点列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ のことである．このような点列の収束性に関する次の定理は重要である．

定理 A.15 $1 \leq p \leq \infty$ とする．このとき，$\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ の任意のコーシー列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，ある $f \in \mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ が存在して，$\|f_n - f\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つ．

この定理に述べられた，ノルム空間 $\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ の性質は，**完備性** (completeness) とよばれ，極めて重要な性質である．第 1 章 1.2.6 項で定義される用語を使うならば，$\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ はバナッハ空間なのである．

定理 A.15 の重要性に鑑みて，その証明をここであたえておこう．

定理 A.15 の証明

$1 \leq p < \infty$ の場合に対してのみ証明する（$p = \infty$ の場合も同様）．証明を通じて，$\|f\|_p = \|f\| (f \in \mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu))$ とおく．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ の任意のコーシー列とする．したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 $n_0 = n_0(\varepsilon)$ が存在して，$n, m \geq n_0$ ならば $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$．このとき，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の適当な部分列 $\{f_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ に対して，

$$\lim_{k \to \infty} \|f_{n(k)} - f\| = 0 \tag{A.23}$$

をみたす $f \in L^p(X, d\mu)$ の存在を示せば十分である．なぜなら，その場合，3 角不等式を用いて，

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \|f_n - f\| \leq \overline{\lim_{n,k \to \infty}} \|f_n - f_{n(k)}\| + \overline{\lim_{k \to \infty}} \|f_{n(k)} - f\| = 0,$$

したがって，$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$ となるからである．

上のような部分列 $\{f_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ が実際に存在することを示そう．$\varepsilon = 1/2$ に対する番号 n_0 のひとつを $n(1)$ とすれば，$n \geq n(1)$ のとき，$\|f_n - f_{n(1)}\| < 1/2$．次に，$\varepsilon = 1/2^2$ に対する番号 n_0 で $n(1)$ より大きくものをひとつとり，これを $n(2)$ とする．したがって，$n \geq n(2)$ のとき，$\|f_n - f_{n(2)}\| < 1/2^2$．以下，順々に，$\varepsilon = 1/2^k$ の場合に同様の手続きを繰り返すことにより，数列 $\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}$ で

$$
\begin{aligned}
&n(1) < n(2) < \cdots < n(k) < n(k+1) < \cdots, \\
&n > n(k) \text{ ならば，} \|f_n - f_{n(k)}\| < 1/2^k
\end{aligned}
$$

をみたすものがとれる．したがって，特に，$\|f_{n(k+1)} - f_{n(k)}\| < \frac{1}{2^k}$ が成立する．これから，

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n(k+1)} - f_{n(k)}\| \leq 1 \tag{A.24}
$$

となる．さて，

$$
f_{n(k)}(x) = f_{n(1)}(x) + \sum_{j=1}^{k-1} (f_{n(j+1)} - f_{n(j)}) \tag{A.25}
$$

と書けることに注意して，右辺がある $f \in \mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ に収束することを示そう．関数

$$
g_k(x) = |f_{n(1)}(x)| + \sum_{j=1}^{k-1} |f_{n(j+1)}(x) - f_{n(j)}(x)|
$$

を考える．明らかに，$0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \cdots \leq g_k(x) \leq g_{k+1}(x) \leq \cdots$．したがって，$g(x) := \lim_{k\to\infty} g_k(x)$ は $+\infty$ になる場合も含めて存在し，

$$
\int_{\mathsf{X}} g(x)^p d\mu(x) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathsf{X}} g_k(x)^p d\mu(x)
$$

が成立する*8（この段階では，右辺の極限は有限であるかどうかはわからない）．一方，(A.24) によって，$\|g_k\| \leq \|f_{n(1)}\| + 1$ であるから，$\int_X g(x)^p d\mu(x) \leq (\|f_{n(1)}\| + 1)^p < \infty$．したがって，$g(x)$ は a.e. 有限であり，$g \in \mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ である．これから，特に，(A.25) の右辺は，a.e. で絶対収束する．すなわち，$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_{n(k)}(x)$ は a.e.x

---

*8 一般に，X 上で，$0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \cdots \leq h_n \leq \cdots, \lim_{n\to\infty} h_n = h$ (h_n, h は X 上の可測関数) ならば，$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathsf{X}} h_n d\mu = \int_{\mathsf{X}} h d\mu$ が成り立つ．ただし，等号は，両辺とも無限大になる場合も含む．

に対して存在して，$|f(x)| \leq g(x)$ が成り立つ．したがって，$f \in \mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ である．一般に，任意の正の数 a, b と $p \geq 1$ に対して，

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

が成り立つから，

$$|f_{n(k)} - f(x)|^p \leq 2^{p-1}(|f_{n(k)}(x)|^p + |f(x)|^p) \leq 2^{p-1}(g(x)^p + |f(x)|^p).$$

すでに示したように，$g^p + |f|^p$ は可積分であるから，ルベーグの優収束定理によって，$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathsf{X}} |f_{n(k)}(x) - f(x)|^p d\mu(x) = 0$ が得られる．よって，(A.23) が示された．□

いまの証明から，次の事実も示されたことになる．

定理 A.16　$1 \leq p < \infty$ とする．$f_n, f \in \mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$, $\|f_n - f\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$ ならば，部分列 $\{n_k\}_k$ が存在して $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$,　μ-a.e.x，が成り立つ．

この定理は，「L^p 収束する点列は適当な部分列を選べば，a.e. の点で収束させることができる」ことを主張しているわけで，理論上，しばしば有用である．

A.8　確率論の基本事項

この節では，測度論の一種としての確率論の初等的な事柄を記述する．

A.8.1　確率空間と確率変数

Ω を空でない集合とし，B を Ω の部分集合からなるひとつのボレル集合体とする．可測空間 (Ω, B) の上に $P(\Omega) = 1$ をみたす測度 P があたえられたとき，三つ組 (Ω, B, P) を**確率空間** (probability space) といい，P を**確率測度** (probability measure) という．

空間 Ω 上で定義された，実数または $\pm\infty$ の値をとる B-可測関数 $X : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ が測度 P に関してほとんどいたるところ有限であるとき，X を確率空間 (Ω, B, P) 上の**確率変数** (random variable) という．

確率変数は，そのとりうる値が確率的に分布する変動量を表わすための概念である．確率変数 X と $\mathbb{R}$ のボレル集合 $B \in \mathsf{B}^1$ に対して，

$$X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}. \qquad \text{(A.26)}$$

とするとき，X が B の中に値をとる確率は

$$P^X(B) := P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}) = P(X^{-1}(B)) \qquad \text{(A.27)}$$

によって定義される．これに関して，次の事実が証明される：

定理 A.17 $P^X(\cdot)$ は可測空間 $(\mathbb{R}, \mathsf{B}^1)$ 上の確率測度である．

証明 任意の $B \in \mathsf{B}^1$ に対して，$0 \leq P^X(B) \leq 1$，$P^X(\emptyset) = 0$ は明らか．$B_n \in \mathsf{B}^1\ (n = 1, 2, \cdots)$, $B_j \cap B_k = \emptyset\,(j \neq k)$，$E_n = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B_n\}$ とすれば，

$$\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in \cup_{n=1}^{\infty} B_n\} = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$$

$j \neq k$ ならば，$E_j \cap E_k = \emptyset$．これらの事実と P の完全加法性により，

$$P^X(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = P(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P^X(B_n).$$

したがって，P^X は完全加法的である．ゆえに，P^X は $(\mathbb{R}, \mathsf{B}^1)$ 上の測度である．

(A.27) によって，$P^X(\mathbb{R}) = P(X^{-1}(\mathbb{R}))$．$X$ は P-a.e. 有限であるから，$P(\Omega \setminus X^{-1}(\mathbb{R})) = 0$．したがって，$P(X^{-1}(\mathbb{R})) = P(\Omega) = 1$．ゆえに，$P^X(\mathbb{R}) = 1$．これと前半の結果により，題意がしたがう． □

$(\mathbb{R}, \mathsf{B}^1)$ 上の確率測度 P^X を X の**分布** (distribution) とよぶ．こうして，確率変数 X に対して，確率空間 $(\mathbb{R}, \mathsf{B}^1, P^X)$ がつくられる．

次の定理は，P に関する積分と P^X に関する積分の基本的な関係をあたえる重要な事実である．

定理 A.18 $\mathbb{R}$ 上の任意のボレル可測関数 f に対して，

$$\int_{\Omega} f(X(\omega))dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dP^X(x) \tag{A.28}$$

が成り立つ．ただし，どちらか一方の積分は存在するとする．

証明 4 段に分けて証明する．

（第 1 段）まず，$f = \chi_B$ ($B \in \mathsf{B}^1$ の定義関数) の場合に，(A.28) を示す．この場合，(A.28) の右辺は，$P^X(B)$ となる．一方，$f(X(\omega)) = \chi_{X^{-1}(B)}(\omega)$ であるから，(A.28) の左辺は，$P(X^{-1}(B))$ に等しい．だが，これは，(A.27) によって，$P^X(B)$ に等しい．よって，(A.28) が成立する．

（第 2 段）第 1 段の結果と積分の線形性により，(A.28) は $\mathbb{R}$ 上の定義関数の任意の一次結合，すなわち，単純関数（階段関数）に対して成立する．

（第 3 段）$f \geq 0$ の場合，非負の単関数の単調増加列 $\{f_n\}_n$ で $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ をみたすものがとれる．第 2 段の結果により，

$$\int_{\Omega} f_n(X(\omega))dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dP^X(x).$$

この式の右辺は，積分の定義によって，$n \to \infty$ のとき，$\int_{\mathbb{R}} f(x)dP^X(x)$ に収束する．この事実と，

$$0 \leq f_1(X(\omega)) \leq f_2(X(\omega)) \leq \cdots, \ \lim_{n\to\infty} f_n(X(\omega)) = f(X(\omega)), \ \text{a.e.}\omega,$$

によって，単調収束定理（付録 A.3 を参照）を応用することができ，上の式の左辺は，$n \to \infty$ のとき，$\int_\Omega f(X(\omega))dP(\omega)$ に収束することがわかる．よって，(A.28) が成立する．

（第 4 段）f が一般の実数値関数の場合は，

$$f = f_+ - f_-, \ f_+(x) := \max\{f(x), 0\} \geq 0, \ f_-(x) = -\min\{f(x), 0\} \geq 0,$$

と表わされるので，$f_\pm$ に第 3 段の結果を応用し，積分の線形性を用いれば，(A.28) の成立が示される．f が複素数値の場合は，$f = f_1 + if_2$ (f_1, f_2 は実数値関数) と表わし，積分の線形性と実数値関数に対して証明された (A.28) を使えばよい．　□

定理 A.18 は，一種の変数変換公式であり，Ω 上の確率変数 X は，確率空間 $(\mathbb{R}, \mathsf{B}^1, P^X)$ 上では，関数 x に “変容” することを示している．

確率変数 X の積分

$$E[X] := \int_\Omega X(\omega)dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x dP^X(x) \tag{A.29}$$

が有限のとき，これを X の**期待値** (expectation) あるいは**平均** (mean, average) とよぶ．これは，確率的に分布する X の値の統計的平均値を表わす．

関数 $(X(\omega) - E(X))^2$ が測度 P について積分可能であるとき，その期待値

$$E[(X - E[X])^2] := \int_\Omega (X(\omega) - E(X))^2 dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} (x - E(X))^2 dP^X(\omega) \tag{A.30}$$

を X の**分散** (variance)，その平方根 $\sqrt{E[(X - E[X])^2]}$ を**標準偏差** (standard deviation) という．これらの量は，X の値がその平均値のまわりにどのように分布しているか，その広がり具合に対するひとつの尺度をあたえる量である．分散あるいは標準偏差が小さいほど，X の値の分布は，平均値のまわりに集中していると解釈される．

A.8.2　確率ベクトル

1 個の確率変数だけではなく，いくつかの確率変数の組を考えることも必要であり，また有用でもありうる．確率空間 (Ω, B, P) 上の n 個の確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ の組 $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ を $\boldsymbol{n}$ **次元確率ベクトル**という．

f を $\mathbb{R}^n$ 上の実数値ボレル可測関数とすれば，写像 $f(X_1, \cdots, X_n) : \omega \to f(X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))$ は確率変数である．

1 個の確率変数の場合と同様に，任意の n 次元ボレル集合 B に対して，

$$P^{\mathbf{X}}(B) := P\{\omega \in \Omega | \mathbf{X}(\omega) \in B\} \tag{A.31}$$

とすれば，$P^{\mathbf{X}}$ は，n 次元可測空間 $(\mathbb{R}^n, \mathsf{B}^n)$ 上の確率測度になる．$P^{\mathbf{X}}$ を確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ の**結合分布**あるいは**同時分布**という．定理 A.18 の一般化として次の定理が成り立つ（証明は定理 A.18 のそれと同様）：

定理 A.19 $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ を確率空間 (Ω, B, P) 上の確率ベクトル，f を $\mathbb{R}^n$ 上の実数値ボレル可測関数とするとき，

$$E[f(X_1, \cdots, X_n)] = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \cdots, x_n) dP^{\mathbf{X}}(x_1, \cdots, x_n)$$

が成り立つ．ただし，どちらか一方の積分は存在するとする．

付録B フーリエ変換

この付録では，本文で頻繁に使うことになるフーリエ変換の基本事項をまとめておく．

B.1 基本的な関数空間

$\mathbb{R}^d$ の部分集合 D に対して，$\overline{D}$ によって，D の閉包を表わす：

$$\overline{D} := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{となる} x_n \in D \text{が存在} \}. \tag{B.1}$$

$\mathbb{R}^d$ 上の複素数値関数 f に対して，$f(x)$ が 0 でないような点 $x = (x_1, \cdots, d) \in \mathbb{R}^d$ の集合の閉包を f の**台** (support) といい，$\operatorname{supp} f$ で表わす：

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d | f(x) \neq 0\}}. \tag{B.2}$$

$\mathbb{R}^d$ 上の無限回微分可能な関数の全体を $\mathsf{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ で表わす．有界な台をもつ無限回微分可能な関数の全体を $\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ とする[*1]．すなわち，$f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ であるとは，$f \in \mathsf{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ であり，かつ $R > 0$ が存在して，$\operatorname{supp} f \subset \{x \in \mathbb{R}^d \,|\, |x| \leq R\}$ が成立することと同値である．

$\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に属する関数の例として，任意の正の定数 a に対して，

$$\varrho(x) = \begin{cases} 0 & ; |x| \geq 1 \text{のとき} \\ \exp\left(-\frac{a}{1-|x|^2}\right) & ; |x| < 1 \text{のとき} \end{cases}$$

によって定義される関数 ϱ がある．この関数の台は $\{x \in \mathbb{R}^d | \ |x| \leq 1\}$ である．任意の $r > 0$ に対して，$\varrho^{(r)}(x) = \varrho(x/r)$ によって定義される関数 $\varrho^{(r)}$ も明らかに $\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元であり，その台は $\{x \in \mathbb{R}^d | \ |x| \leq r\}$ である．任意の $f \in \mathsf{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して，f と $\varrho^{(r)}$ の積 $f\varrho^{(r)}$ も $\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に属する．こうして，$\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元は“十分たくさん”あることがわかる．

[*1] $\mathbb{R}^d$ の部分集合 D が有界であるとは，それがある半径の球に含まれること，すなわち，定数 $R > 0$ が存在して，$D \subset \{x \in \mathbb{R}^d \,|\, |x| \leq R\}$ が成立するときをいう．

空間 $\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は，$f,g \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ の和 $f+g$ を $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ によって，スカラー倍 $\alpha f (\alpha \in \mathbb{C})$ を $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ によって定義すれば，複素ベクトル空間になる．

$\mathbb{R}^d$ 上のルベーグ測度空間 $(\mathbb{R}^d, \mathsf{B}^d, \mu_L^d)$ に関する p 乗可積分関数の同値類の空間を $\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ と記す（付録 A.7 を参照）．

$f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\mathrm{supp}\, f = K$, とすれば $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx = \int_K |f(x)|^p dx \le |K| \sup_{x\in K} |f(x)|^p < \infty$ （$|K|$ は K のルベーグ測度を表わす）であるから，

$$\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d) \tag{B.3}$$

である．

$(\mathsf{X}, \mathsf{B}, \mu)$ を測度空間とし，D を $\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ の部分集合とする．任意の $f \in \mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ に対して，

$$\|f_n - f\|_{\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)} \to 0 \ (n \to \infty)$$

となる列 $\{f_n\}_n \subset \mathsf{D}$ が存在するとき，D は $\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ で稠密であるという．

空間 $\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ 上の解析において，次の事実は基本的である．

定理 B.1　$1 \le p < \infty$ とする．このとき，$\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は $\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ で稠密である．

この定理の成立は以下の二つの補題による．$\mathsf{C}_0(\mathbb{R}^d)$ を有界な台をもつ，$\mathbb{R}^d$ 上の連続関数の全体とする．

補題 B.2　$\mathsf{C}_0(\mathbb{R}^d)$ は $\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ で稠密である．

証明　$\mathbb{R}^d$ 上のルベーグ積分の一般的定理によって，$f \in \mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ ならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，台が有界な連続関数 f_ε が存在して，$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - f_\varepsilon(x)|^p dx < \varepsilon$ が成立する*2．これは，補題の主張を意味する．　□

補題 B.3　任意の $f \in \mathsf{C}_0(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\|f_n - f\|_{\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)} \to 0 \ (n \to \infty)$$

となる列 $\{f_n\}_n \subset \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ が存在する．

証明　$f \in \mathsf{C}_0(\mathbb{R}^d), \mathrm{supp}\, f \subset \{x \in \mathbb{R}^d \,|\, |x| \le R\}$($R>0$ はある定数) とする．$\varrho \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ で $\mathrm{supp}\, \varrho \subset \{x \in \mathbb{R}^d \,|\, |x| \le 1\}, \varrho \ge 0, \int_{\mathbb{R}^d} \varrho(x) dx = 1,$ をみたすものをひとつとり，

$$f_n(x) = n^d \int_{\mathbb{R}^d} \varrho(n(x-y)) f(y) dy, \ n = 1, 2, \cdots,$$

*2 伊藤清三『ルベーグ積分入門』（裳華房）の定理 12.6 およびその証明を参照．

とおく．このとき，$\mathrm{supp}\, f_n \subset \{x \in \mathbb{R}^d | |x| \leq n^{-1} + R\}$ であり，定理 A.8（付録 A.4 を参照）を応用することにより，$f_n \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ がわかる．さらに，

$$\begin{aligned} f_n(x) - f(x) &= n^d \int_{\mathbb{R}^d} \varrho(n(x-y))(f(y)-f(x))dy \\ &= \int_{|z|\leq 1} \varrho(z) \left\{ f\left(x - \frac{z}{n}\right) - f(x) \right\} dz. \end{aligned}$$

f の台は有界であるから，f は一様連続である．したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$|x-y| < \delta$ ならば，$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ が成立する．n_0 を $1/\delta$ 以上の最小の自然数とすれば，$n \geq n_0$ のとき，$|z| \leq 1$ ならば，$|z/n| < \delta$．したがって，$|f(x - z/n) - f(x)| < \varepsilon$．ゆえに，$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$．これは，$\int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x) - f(x)|^p dx \leq \varepsilon^p \int_{|x|\leq R+1} dx$ を導く．よって，求める結果が示される．□

定理 B.1 の証明

補題 B.2 によって，任意の $f \in \mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\|f_n - f\|_{\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)} \to 0$ $(n \to \infty)$ となる $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathsf{C}_0(\mathbb{R}^d)$ が存在する．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 n_0 があって，$n \geq n_0$ ならば，$\|f_n - f\|_{\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon/2$ が成り立つ．補題 B.3 によって，各 f_n に対して，$\|g_n - f_n\|_{\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon/2$ をみたす $g_n \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ が存在する．3 角不等式によって，$n \geq n_0$ に対して，

$$\|g_n - f\|_{\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|g_n - f_n\|_{\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)} + \|f_n - f\|_{\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

これは，$\lim_{n\to\infty} \|g_n - f\|_{\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)} = 0$ を意味する．よって題意がしたがう．□

非負の整数 m に対して，関数 $f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ の，変数 x_j に関する偏導関数を $\partial_j^m f$ と記す：

$$\partial_j^m f(x) := \frac{\partial^m f(x)}{\partial x_j^m} = \frac{\partial^m}{\partial x_j^m} f(x).$$

d 個の非負整数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_d$ の組 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$ を**多重指数** (multi-index) とよび，

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^d \alpha_j$$

とおく．多重指数 α に対して，偏微分演算子 ∂^α を

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d} f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d} f$$

によって定義する．明らかに，$f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ならば，$\partial^\alpha f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ である．

$\mathbb{R}^d$ 上の無限回微分可能な複素数値関数 f は，任意の $m \in \mathbb{N}$ と任意の多重指数 α に対して

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^m \partial^\alpha f(x) = 0 \tag{B.4}$$

をみたすとき，**急減少関数** (rapidly decreasing function) であるといわれる．これは，つまり，すべての偏導関数が，無限遠において，$|x|$ のどんな負の整数べき乗よりも速く減少するような関数のことである．$\mathbb{R}^d$ 上の急減少関数の全体を $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ で表わす．この集合は，関数の通常の和とスカラー倍に関してベクトル空間になる．明らかに，

$$\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \tag{B.5}$$

例 B.1 $P(x)$ は $x_1, \cdots, x_d$ の任意の多項式とするとき，関数 $P(x)e^{-a|x|^{2n}}$ ($a > 0$ は任意の定数，$n = 1, 2, \cdots$) は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の元である．

$x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ と多重指数 α に対して，

$$x^\alpha = \prod_{j=1}^d x_j^{\alpha_j} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d} \tag{B.6}$$

とおく．$|x_j| \le |x|$ であるから，

$$|x^\alpha| \le |x|^{|\alpha|} \tag{B.7}$$

が成立する．$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ならば，(B.4) によって，任意の多重指数 α に対して，

$$x^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \partial^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \tag{B.8}$$

が成立する．したがって，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ は，多項式をかける演算と偏微分をする演算に関して不変である．

任意の $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，それらの積 fg は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の元であることも容易にわかる．つまり，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ は関数の積についても閉じている．

(B.4) によって，任意の非負の整数 m, N に対して，関数

$$|x|^m |\partial^\alpha f(x)|, \quad |x|^{m+N} |\partial^\alpha f(x)|$$

はともに $\mathbb{R}^d$ 上で有界である．そこで，$C = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x|^m (|x|^N + 1) |\partial^\alpha f(x)|$ とおけば，

$$|x|^m |\partial^\alpha f(x)| \le \frac{C}{|x|^N + 1},\ x \in \mathbb{R}^d, \tag{B.9}$$

が成り立つ．したがって，任意の $p>0, q\geq 0$ と多重指数 α に対して $|x|^q|\partial^\alpha f|^p$ はルベーグ測度に関して可積分である．ゆえに，特に，任意の p, $1\leq p<\infty$, に対して，

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\subset \mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d) \tag{B.10}$$

が成り立つ．これと (B.5) および定理 B.1 から次の事実がしたがう（証明の方法は，定理 B.1 のそれと同様）．

定理 B.4　$1\leq p<\infty$ とする．このとき，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ は $\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ で稠密な部分空間である．

B.2　急減少関数の空間上のフーリエ変換

$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，**フーリエ変換** (Fourier transform)$\mathcal{F}f$ を

$$(\mathcal{F}f)(k):=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}f(x)e^{-ikx}dx,\quad k\in\mathbb{R}^d, \tag{B.11}$$

によって定義する．ここで，$kx:=\sum_{j=1}^d k_jx_j$ は $x=(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d$ と $k=(k_1,\cdots,k_d)\in\mathbb{R}^d$ のユークリッド内積を表わす．また，

$$(\bar{\mathcal{F}}f)(k):=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}f(x)e^{ikx}dx,\quad k\in\mathbb{R}^d, \tag{B.12}$$

を**共役フーリエ変換** (conjugate Fourier transform) という．明らかに，

$$(\mathcal{F}f)(k)=\bar{\mathcal{F}}f(-k). \tag{B.13}$$

便宜上，

$$\mathcal{F}f=\hat{f},\quad \bar{\mathcal{F}}f=\check{f}, \tag{B.14}$$

という記法も用いる．

命題 B.5　$\mathcal{F},\bar{\mathcal{F}}$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ からそれ自身への線形演算子であって，任意の多重指数 α と $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$(\mathcal{F}\partial^\alpha f)(k)\;=\;i^{|\alpha|}k^\alpha(\mathcal{F}f)(k), \tag{B.15}$$

$$(\bar{\mathcal{F}}\partial^\alpha f)(k)\;=\;(-i)^{|\alpha|}k^\alpha(\bar{\mathcal{F}}f)(k), \tag{B.16}$$

が成立する[*3]．

[*3] ヒルベルト空間とは限らないベクトル空間の場合にも，線形演算子の概念は全く同様に定義される．すなわち，V,W を F 上のベクトル空間 ($\mathsf{F}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$) とするとき，V から W への写像 T，すなわち，V の各元 v に対して，W の元 $w=T(v)$ をただひとつ定める対応が，

$$T(\alpha u+\beta v)=\alpha T(u)+\beta T(v),\; u,v\in\mathsf{V},\alpha,\beta\in\mathbb{F},$$

をみたすとき，T は**線形**であるという．線形な写像を**線形演算子**という．

証明 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ とすれば，任意の多重指数 α に対して，$x^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ は可積分である [(B.10) を参照]．この事実と付録 A の定理 A.8 の応用によって，$\hat{f}$ は変数 $k_1, \cdots, k_d$ について無限回微分可能であり，

$$\partial_k^\alpha \hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} (-i)^{|\alpha|} x^\alpha f(x) e^{-ikx} dx$$

であることがわかる．ここで，∂_k^α は変数 $k = (k_1, \cdots, k_d)$ に関する偏微分を表わす．関係式

$$\left(-\sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2\right)^m e^{-ikx} = |k|^{2m} e^{-ikx}, \quad m \in N,$$

に注意すると (∂_{x_j} は変数 x_j に関する偏微分)，

$$\begin{aligned} |k|^{2m} \partial_k^\alpha \hat{f}(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} (-i)^{|\alpha|} x^\alpha f(x) \left(-\sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2\right)^m e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} (-i)^{|\alpha|} \left\{\left(-\sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2\right)^m [x^\alpha f(x)]\right\} e^{-ikx} dx. \end{aligned}$$

ここで，部分積分を行なった [$x^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に注意]．(B.8) によって，$\left(-\sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2\right)^m [x^\alpha f(x)]$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の元であるから，それは可積分である．したがって，

$$C = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left|\left(-\sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2\right)^m [x^\alpha f(x)]\right| dx < \infty$$

とおけば，$|k|^m |\partial_k^\alpha \hat{f}(k)| \le \frac{C}{|k|^m} \to 0$ ($|k| \to \infty$)．$m \in \mathbb{N}$ と多重指数 α は任意であったから，$\hat{f}$ は急減少関数である．$\mathcal{F}$ の線形性は明らかであろう．

部分積分により，$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^d} [\partial^\alpha f(x)] e^{-ikx} dx = i^{|\alpha|} k^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ikx} dx.$$

したがって，(B.15) がでる．$\bar{\mathcal{F}}$ についても同様 [(B.13) を用いよ]．□

本文の第 1 章 1.1 節の例 1.15 で述べるように，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ は

$$\langle f, g \rangle_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)^* g(x) dx, \quad f, g \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d), \tag{B.17}$$

を内積として，ヒルベルト空間になる．

定理 B.6　$\mathcal{F}$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ からそれ自身への全単射であり，その逆演算子 $\mathcal{F}^{-1}$ は $\bar{\mathcal{F}}$ に等しい：

$$\mathcal{F}^{-1}f(k) = \bar{\mathcal{F}}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{ikx}dx, \quad k \in \mathbb{R}^d, \tag{B.18}$$

さらに，任意の $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)} = \langle f, g\rangle_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)} \tag{B.19}$$

が成立する（すなわち，$\mathcal{F}$ は内積を保存する）．特に，

$$\|\mathcal{F}f\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \tag{B.20}$$

証明　任意の $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$f(x) = \bar{\mathcal{F}}g(x) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} g(k')e^{ik'x}dk'$$

とおけば，命題 B.4 によって，$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\left|e^{-\varepsilon|x|^2}e^{-ikx}f(x)\right| \leq |f(x)|$$

であり，$|f(x)|$ は可積分であるから，ルベーグの優収束定理（付録 A，定理 A.6）によって，

$$(\mathcal{F}f)(k) = \frac{1}{(2\pi)^d}\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(k)$$

と書ける．ただし，

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(k) &:= (2\pi)^{d/2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\varepsilon|x|^2}e^{-ikx}f(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\varepsilon|x|^2}e^{-ikx}\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{ik'x}g(k')dk'\right)dx. \end{aligned} \tag{B.21}$$

ここで，

$$|e^{-\varepsilon|x|^2}e^{-ikx}e^{ik'x}g(k')| = e^{-\varepsilon|x|^2}|g(k')|$$

であり，これは測度 $dx\,dk'$ に関して可積分であるから，フビニの定理 (付録 A，定理 A.10) により，(B.21) の最右辺の積分の順序は交換してもよい．そこで，

$$K_\varepsilon(k) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\varepsilon|x|^2 - ikx}dx$$

とおけば，

$$I_\varepsilon(k) = \int_{\mathbb{R}^d} g(k')K_\varepsilon(k-k')dk$$

と書ける．複素積分を使うことにより，

$$K_\varepsilon(k) = \left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{d/2} e^{-k^2/4\varepsilon}$$

と計算される．これと変数変換 $\xi = (k' - k)/2\sqrt{\varepsilon}$ により，

$$I_\varepsilon(k) = (4\pi)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} g(k + 2\sqrt{\varepsilon}\xi) e^{-\xi^2} d\xi$$

が得られる．$|g(k+2\sqrt{\varepsilon}\xi)| \leq \|g\|_\infty$，$\lim_{\varepsilon\to 0} g(k+2\sqrt{\varepsilon}\xi) = g(k)$ であり，$e^{-\xi^2}$ は可積分で，$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\xi^2} d\xi = \pi^{d/2}$ であるから，ルベーグの優収束定理により，$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(k) = (2\pi)^d g(k)$．ゆえに，$\mathcal{F}f = g$ が得られる．g は任意の $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の元であったから，これは

$$\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}} = I \tag{B.22}$$

を意味する．したがって，$\mathcal{F}$ は全射である．

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ から $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ への写像 R_S を

$$(R_\mathrm{S} f)(x) = f(-x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{B.23}$$

によって定義する[*4]．明らかに，R_S は線形であり，全単射である．この演算子を用いると，

$$R_\mathrm{S}\mathcal{F} = \bar{\mathcal{F}}, \quad \bar{\mathcal{F}}R_\mathrm{S} = \mathcal{F}, \tag{B.24}$$

が成り立つ．これと (B.22) によって，

$$\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F} = R_\mathrm{S}\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}R_\mathrm{S} = R_\mathrm{S} I R_\mathrm{S} = R_\mathrm{S}^2.$$

一方，$R_\mathrm{S}^2 = I$ であるから，

$$\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F} = I \tag{B.25}$$

を得る．これは $\mathcal{F}$ が単射であることを意味する（$\mathcal{F}f = 0$ ならば，$f = \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = 0$）．以上によって，定理の前半の主張が示されたことになる．

---

*4 演算子 R_S は，物理的には，**空間反転** (space inversion) $x \to -x$ に付随する，関数空間上の線形演算子を表わす．

(B.19) は，(B.18) を用いて，次のように示される：

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)^* e^{ikx}dx\right)(\mathcal{F}g)(k)dk \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)^*\left(\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{F}g)(k)e^{ikx}dk\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)^*(\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}g)(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)^* g(x)dx \\
&= \langle f, g\rangle_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

ここで，第 2 番目の等号における積分の順序交換は，$|f(x)||\mathcal{F}g(k)|$ が $dx\,dk$ について可積分であること，したがって，フビニの定理が適用されることによって正当化される． □

フーリエ変換に関連して，便宜上，$\mathbb{R}^d$ の点を $x = (x_1, \cdots, x_d)$ と表わす場合，$\mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d_x$ と表わす場合がある（変数 k についても同様）．この記法を用いると，定理 B.6 に述べた，$\mathcal{F}$ の全射性はもっと明確に表現することができる．すなわち，

$$\mathcal{F}\mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_k). \tag{B.26}$$

B.3 $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上のフーリエ変換

定理 B.6 によって，フーリエ変換 $\mathcal{F}$ は，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x)$ を定義域とする，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d_x)$ から $L^2(\mathbb{R}^d_k)$ への等長演算子とみることができる[*5]．この事実と定理 B.4 および有界演算子の拡大定理（第 1 章 1.2 節，定理 1.31）を用いると，$\mathcal{F}$ は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d_x)$ から $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d_k)$ へのユニタリ変換（ユニタリ演算子）へと一意的に拡大されることがわかる．すなわち，次の定理が成り立つ．

定理 B.7 $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d_x)$ から $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d_k)$ へのユニタリ変換 $\widehat{\mathcal{F}}$ で，$\mathcal{F} \subset \widehat{\mathcal{F}}$ となるものがただひとつ存在する．特に，任意の $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\langle \widehat{\mathcal{F}}f, \widehat{\mathcal{F}}g\rangle_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)} = \langle f, g\rangle_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)} \tag{B.27}$$

が成立する．

---

*5 第 1 章 1.4 節 1.4.1 項を参照．

証明 上に述べたことにより，$L^2(\mathbb{R}_x^d)$ から $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}_k^d)$ への有界演算子 $\widehat{\mathcal{F}}$ で，$\mathcal{F} \subset \widehat{\mathcal{F}}, \|\widehat{\mathcal{F}}\| = \|\mathcal{F}\| = 1$ となるものがただひとつ存在する（第 1 章 1.2 節，定理 1.31 の応用）．定理 1.31 の証明から，任意の $f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}_x^d)$ に対して，$\|\widehat{\mathcal{F}}f - \mathcal{F}f_n\| \to 0\ (n \to \infty)$ である（$\|\cdot\|$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ のノルム）．ここで，$\{f_n\}_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ は，$\|f_n - f\| \to 0\ (n \to \infty)$ をみたす関数列ならば何でもよい．このことと (B.19) および内積の連続性により，$\widehat{\mathcal{F}}$ は内積を保存することがわかる．すなわち，(B.27) が成立する．任意の $g \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}_k^d)$ に対して，定理 B.4 によって，$\|g_n - g\| \to 0\ (n \to \infty)$ となる $g_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_k^d)$ が存在する．このとき，定理 B.6 によって，各 n に対して，$g_n = \mathcal{F}f_n$ となる $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^d)$ がただひとつ定まる．(B.20) によって，$\|g_n - g_m\| = \|f_n - f_m\|$ であるから，$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ はコーシー列になる．したがって，$f = \lim_{n\to\infty} f_n \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}_x^d)$ が存在する．ゆえに，

$$
\begin{aligned}
\|\widehat{\mathcal{F}}f - g\| &\le \|\widehat{\mathcal{F}}f - \mathcal{F}f_n\| + \|\mathcal{F}f_n - g\| \\
&= \|f - f_n\| + \|g_n - g\| \\
&\to 0\ (n \to \infty).
\end{aligned}
$$

これは，$g = \widehat{\mathcal{F}}f$ を意味する．したがって，$\widehat{\mathcal{F}}$ は全射である．こうして，$\widehat{\mathcal{F}}$ は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}_x^d)$ から $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}_k^d)$ へのユニタリ演算子であることがわかる． □

ユニタリ変換 $\widehat{\mathcal{F}}$ を $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ **上のフーリエ変換**という．(B.27) を（フーリエ変換に関する）**パーセヴァルの等式**という．

演算子 $\widehat{\mathcal{F}}$ は，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上のフーリエ変換 $\mathcal{F}$ の拡大であるので，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に属さない $f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対しては，その作用 $\widehat{\mathcal{F}}f$ がどのような形をとるかは，ただちに明らかではない．$\widehat{\mathcal{F}}f$ も (B.11) の右辺の形であたえられれば都合がよい．だが，(B.11) の右辺は f が可積分でなければ意味をもたない．一方，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ の元で可積分でない元はたくさんある*6．したがって，いま述べたことは期待できない．しかし，以下に示すように (B.11) の等号の意味を変更することにより，$\widehat{\mathcal{F}}f$ は (B.11) のある種の一般化としてあたえられることがわかる．

この問題を考察するには，まず，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ の部分空間で $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ よりも真に大きいものに属する元に対して，$\widehat{\mathcal{F}}$ の作用を求めるとよい．

定理 B.8 任意の $f \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$
(\widehat{\mathcal{F}}f)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ikx} dx, \quad \text{a.e.}k. \tag{B.28}
$$

証明 証明を通して，L^2 ノルムを単に $\|\cdot\|$ と表わす．まず，任意の $f \in \mathsf{C}_0(\mathbb{R}^d) \subset \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，(B.28) を示す．$f_n \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を定理 B.3 の証明のものと

*6 たとえば，$f(x) = (1 + |x|)^{-p}$, $x \in \mathbb{R}^d$, によって定義される関数 f（の同値類）は，$d/2 < p < d$ のとき，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ の元であるが，可積分ではない．

する．このとき，$\|f_n - f\| \to 0\ (\varepsilon \to 0)$ であるから，$\|\widehat{\mathcal{F}}f_n - \widehat{\mathcal{F}}f\| \to 0\ (n \to \infty)$．したがって，付録 A，定理 A.16 によって，$n_j \to 0\ (j \to \infty)$ となる部分列 $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ が存在して，$\lim_{j\to\infty}(\widehat{\mathcal{F}}f_{n_j})(k) = (\widehat{\mathcal{F}}f)(k)$, a.e.$k$, が成立する．これと $\widehat{\mathcal{F}}f_{n_j} = \mathcal{F}f_{n_j}$ によって，

$$(\widehat{\mathcal{F}}f)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_{n_j}(x) e^{-ikx} dx, \quad \text{a.e.}k.$$

定理 B.3 の証明から，右辺に対してルベーグの優収束定理を応用することができるので，(B.28) が得られる．

次に，台が有界な $f \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，(B.28) を示す．$R > 0$ に対して，

$$V_R := \{x \in \mathbb{R}^d |\ |x| \le R\} \tag{B.29}$$

とおく．仮定により，$\operatorname{supp} f \subset V_R$ となる $R > 0$ がある．このとき，R を十分大きくとれば，$\operatorname{supp} f_n \subset V_R, n = 1, 2, \cdots$，$\lim_{n\to\infty}\|f - f_n\| = 0$ をみたす関数列 $\{f_n\}_n \subset \mathsf{C}_0(\mathbb{R}^d)$ がとれる*7．したがって，$\|\widehat{\mathcal{F}}f_n - \widehat{\mathcal{F}}f\| \to 0\ (n \to \infty)$．これと前段の結果および付録 A，定理 A.16 により，$\{f_n\}_n$ の部分列 $\{f_{n(j)}\}_j$ で

$$(\widehat{\mathcal{F}}f)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_{n(j)}(x) e^{-ikx} dx, \quad \text{a.e.}k,$$

をみたすものが存在する．関数 f_n, f の台の特性とシュヴァルツの不等式によって，

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^d} f_{n(j)}(x) e^{-ikx} dx - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ikx} dx \right| \\
&= \left| \int_{V_R} (f_{n(j)}(x) - f(x)) e^{-ikx} dx \right| \\
&\le |V_R|^{1/2} \left(\int_{V_R} |f_{n(j)}(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\to 0\ (j \to \infty).
\end{aligned}$$

したがって，(B.28) が得られる．

一般の $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ に対しては，$f_R = \chi_{V_R} f$ とすれば，前段の結果により，

$$(\widehat{\mathcal{F}}f_R)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{|x|\le R} f(x) e^{-ikx} dx, \quad \text{a.e.}k. \tag{B.30}$$

容易にわかるように，$\|f_R - f\| \to 0\ (R \to \infty)$．したがって，$\|\widehat{\mathcal{F}}f_R - \widehat{\mathcal{F}}f\| \to 0\ (R \to \infty)$．したがって，$R_n \to \infty\ (n \to \infty)$ となる数列 $\{R_n\}_n$ が存在して，

*7 伊藤清三『ルベーグ積分入門』（裳華房）の p.83, 定理 12.6 を参照.

$(\widehat{\mathcal{F}} f_{R_n})(k) \to (\widehat{\mathcal{F}} f)(k)$, a.e.$k$ $(n \to \infty)$. 一方, (B.30) とルベーグの優収束定理によって ($f \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^d)$ に注意),

$$(\widehat{\mathcal{F}} f_{R_n})(k) \to \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ikx} dx, \text{ a.e.} k \ (n \to \infty)$$

ゆえに (B.28) を得る. □

以上の準備のもとで, $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ の一般の元 f に対する $\widehat{\mathcal{F}} f$ を求めることができる.

定理 B.9　任意の $f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対して,

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left| (\widehat{\mathcal{F}} f)(k) - \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{|x| \le R} f(x) e^{-ikx} dx \right|^2 dk = 0. \qquad \text{(B.31)}$$

さらに, $\widehat{\mathcal{F}}$ の逆演算子は, 任意の $g \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対して,

$$\lim_{K \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left| (\widehat{\mathcal{F}}^{-1} g)(x) - \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{|k| \le K} g(k) e^{ikx} dk \right|^2 dx = 0, \qquad \text{(B.32)}$$

によってあたえられる.

証明　$f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ と $R > 0$ に対して, $f_R = \chi_{V_R} f$ とおけば, $f_R \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ であるから, 定理 B.8 によって,

$$(\widehat{\mathcal{F}} f_R)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{|x| \le R} f(x) e^{-ikx} dx, \quad \text{a.e.} k.$$

一方, $\|f_R - f\| \to 0$ $(R \to \infty)$ であるから, $\|\widehat{\mathcal{F}} f_R - \widehat{\mathcal{F}} f\| \to 0$ $(R \to \infty)$. したがって, (B.31) が得られる. (B.32) も同様して証明される. □

付録 A の (A.22) で導入した平均 2 乗収束の記号 l.i.m. を用いれば, (B.31) は,

$$(\widehat{\mathcal{F}} f)(k) = \text{l.i.m.}_{R \to \infty} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{|x| \le R} f(x) e^{-ikx} dx \qquad \text{(B.33)}$$

と書ける ($\widehat{\mathcal{F}}^{-1} g$, $g \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$, についても同様). こうして, 一般の $f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対するフーリエ変換 $\widehat{\mathcal{F}} f$ は, (B.11) の右辺の積分を有界領域の積分の極限としてとらえ, その収束の意味を平均 2 乗収束の意味で考えたものよってあたえられることがわかる. (B.32) はフーリエ変換の**反転公式** (inversion formula) とよばれる. フーリエ変換の逆演算子 $\widehat{\mathcal{F}}^{-1}$ を**逆フーリエ変換**という.

以下および本文においては, 記号上の簡潔さのため, $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上のフーリエ変換 $\widehat{\mathcal{F}}$ も単に $\mathcal{F}$ と記すことにする. また, $f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対して, そのフーリエ変換を $\hat{f}$, 逆フーリエ変換を $\check{f}$ と記す.

B.4　$\mathsf{L}^1(\mathbb{R}^d)$ 上のフーリエ変換

$f \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^d)$ に対しては，(B.11) の右辺は意味をもつので，これによって，f のフーリエ変換 $\mathcal{F}f$ を定義する．$\mathcal{F}f$ を $\hat{f}$ とも記す．次の事実は基本的である．

定理 B.10　任意の $f \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\hat{f}$ は，$\mathbb{R}^d$ 上の有界な連続関数であり，

$$\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\|f\|_{\mathsf{L}^1(\mathbb{R}^d)} \tag{B.34}$$

が成り立つ．

証明　$\hat{f}$ が有界で (B.34) が成り立つことは，簡単な積分評価

$$\left|\hat{f}(k)\right| \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|dx, \quad k \in \mathbb{R}^d.$$

による．任意の $k, q \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$\left|\hat{f}(k+q) - \hat{f}(k)\right| \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\,|e^{-iqx} - 1|dx. \tag{B.35}$$

他方，$g_q(x) := |f(x)|\,|e^{-iqx}-1| \leq 2|f(x)|$ である．$|f(x)|$ は可積分であり，$\lim_{q\to 0} g_q(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^d$，であるから，ルベーグの優収束定理（付録 A，定理 A.6）を応用できて，(B.35) の右辺は，$q \to 0$ のとき，0 に収束する．したがって，$\hat{f}$ は連続である．　□

次の事実は重要である：

定理 B.11　**リーマン-ルベーグの補題**．$f \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^d)$ ならば，各 $j = 1, \cdots, d$ に対して，

$$\lim_{|k_j|\to\infty}\hat{f}(k) = 0. \tag{B.36}$$

証明　$\mathbb{R}^d$ の点 x を $x = (x_1, \tilde{x}), \tilde{x} \in \mathbb{R}^{d-1}$, のように表わす．するとフビニの定理によって，

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} F(t, \tilde{k})e^{-ik_1 t}dt$$

と書ける．ただし，

$$F(t, \tilde{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(t, \tilde{x})e^{-i\tilde{k}\tilde{x}}d\tilde{x}.$$

$|k_1|$ は十分大きいとする．$e^{-ik_1t} = -e^{-ik_1(t-\pi/k_1)}$ であるから，

$$\hat{f}(k) = -\int_{\mathbb{R}} F(t,\tilde{k})e^{-ik_1(t-\pi/k_1)}dt = -\int_{\mathbb{R}} F\left(t+\frac{\pi}{k_1},\tilde{k}\right)e^{-ik_1t}dt.$$

したがって，

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \frac{1}{2}\left\{\int_{\mathbb{R}} F(t,\tilde{k})e^{-ik_1t}dt - \int_{\mathbb{R}} F\left(t+\frac{\pi}{k_1},\tilde{k}\right)e^{-ik_1t}dt\right\} \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left\{F(t,\tilde{k}) - F\left(t+\frac{\pi}{k_1},\tilde{k}\right)\right\}e^{-ik_1t}dt.\end{aligned}$$

ゆえに

$$2|\hat{f}(k)| \le \int_{\mathbb{R}}\left|F(t,\tilde{k}) - F\left(t+\frac{\pi}{k_1},\tilde{k}\right)\right|dt.$$

ルベーグ積分の基本定理により（たとえば，伊藤清三『ルベーグ積分入門』（裳華房）の定理 12.8），この不等式の右辺は，$|k_1| \to \infty$ としたとき，0 に収束する．したがって，$j=1$ に対して，(B.36) が成立する．

変数 $k_j\,(j \ne 1)$ についても同様（次のようにすると簡単である：$g(x) = f(x_j, x_2, \cdots, x_{j-1}, x_1, x_{j+1}, \cdots, x_d)$ とすれば，

$$\hat{g}(k_j, k_2, \cdots, k_{j-1}, k_1, k_{j+1}, \cdots, k_d) = \hat{f}(k)$$

であり，前段の結果より，$\lim_{|k_j|\to\infty} \hat{g}(k_j, k_2, \cdots, k_{j-1}, k_1, k_{j+1}, \cdots, k_d) = 0$ であるから，(B.36) が得られる）． □

付録C 超関数論要項

この付録では，超関数論の基本的な事項を本文で使う範囲内においてまとめておく．超関数論にはじめてふれる読者にもこれを理解し使えるように配慮して書いたつもりである．そういう意味では，この付録は，超関数論の短い入門コースでもある．

超関数というのは，要するに，従来の関数概念の一般化である．この一般化は，関数の収束に関する位相を変える（“弱くする”）ことによって達成される．この点さえおさえておけば，超関数論を理解するのは困難なことではない．超関数の理論は位相というものの重要性を示すとともに，20 世紀の数学の世界に大きな刺激と稔りをもたらした[*1]．

C.1 試験関数の空間

付録 B において，$\mathbb{R}^d$ 上の無限回微分可能で有界な台をもつ関数の空間 $\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を導入した．そこでは，この空間は $\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ の部分空間として扱われただけであった．だが，L^p 空間から定まる位相以外の位相（元の間の“近さ”を測る概念）を $\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に導入することも可能である[*2]．

定義 C.1 $\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に属する関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が，$n\to\infty$ のとき，$\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ の関数 f に収束するというのは次の条件 (i), (ii) がみたされることをいう：

(i) f_n の台は，n に依存しない，同一の有界閉集合に含まれる．すなわち，ある有界閉集合 K が存在して，すべての $n=1,2,\cdots,$ に対して，$\operatorname{supp} f_n \subset K$．

(ii) すべての多重指数 α に対して，$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|\partial^\alpha(f_n(x)-f(x))|\to 0\ (n\to\infty)$．

---

*1 この付録で扱わない，超関数論の主題については，たとえば，L. シュワルツ (Schwartz)『超関数論』（岩波書店，1953），同『物理数学の方法』（同書店，1966），I.M. Gel'fand and G.E. Shilov: *Generalized Functions*, Vol.I, II (Academic Press, 1964, 1968), 垣田高夫『シュワルツ超関数入門』（日本評論社）等を参照されたい．

*2 位相空間論では「コンパクト集合」という概念がある．ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ の場合，部分集合がコンパクト集合であるための必要十分条件はそれが有界閉集合であることである（たとえば，伊藤清三『ルベーグ積分入門』（裳華房）の付録の §3 を参照）．本来は，$\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は，「$\mathbb{R}^d$ 上の無限回微分可能で，コンパクトな台をもつ関数の空間」として定義される．この方がその本質にかなっているのである．なぜなら，こちらの定義は，もっと一般の位相空間の場合へと自然に拡大されうるからである．

この定義の条件 (ii) は，f_n のすべての偏導関数が，f の対応する偏導関数に一様収束することと同等である．$K \cup \operatorname{supp} f = M$ とすれば，(ii) で sup をとる範囲は，実際には，M でよいことに注意しよう．関数列の一様収束は，各点収束を意味するから[*3]，結果的に，$\operatorname{supp} f \subset K$ であることがわかる．

定義 C.1 のような仕方で収束が定義された空間 $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ と記し，これを**試験関数** (test function) **の空間**という．上の意味で，f_n が f に収束することを f_n は f に $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ **の位相で収束する**あるいは $\mathcal{D}$ **収束**するという．これを記号的に $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f$ $(n \to \infty)$ と記すこともある．空間 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ は単なるベクトル空間ではなく，いま述べた意味での位相の入った空間である．一般に位相の入ったベクトル空間は**位相線形 (ベクトル) 空間** (topological vector space) とよばれるが，$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ はそのような空間の一例である[*4]．

C.2 超　関　数

空間 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ から $\mathbb{C}$ への写像，すなわち，$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ 上の汎関数 $\phi : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ について，任意の $f, g, \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ と複素数 λ, μ に対して，

$$\phi(\lambda f + \mu g) = \lambda\phi(f) + \mu\phi(g) \quad (\text{線形性}) \tag{C.1}$$

が成立するとき，ϕ を $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ 上の**線形汎関数** (linear functional) という．さらに，$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f$ のとき，つねに $\phi(f_n) \to \phi(f)$ ならば，ϕ は**連続**であるという．$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ 上の連続な線形汎関数のことを $\mathbb{R}^d$ **上の超関数** (distribution) という．$\mathbb{R}^d$ 上の超関数の全体を $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ あるいは $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)^*$ で表わす．

超関数の例はあとで見ることにして，定義を続けよう．

二つの超関数 ϕ_1, ϕ_2 が，任意の $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ に対して $\phi_1(f) = \phi_2(f)$ をみたすとき，ϕ_1 と ϕ_2 は等しいといい，$\phi_1 = \phi_2$ と書く．

任意の二つの超関数 ϕ_1, ϕ_2 に対して，それらの和 $\phi_1 + \phi_2$ を

$$(\phi_1 + \phi_2)(f) = \phi_1(f) + \phi_2(f), \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tag{C.2}$$

によって定義すれば，$\phi_1 + \phi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ である．なぜなら，$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f \quad (n \to \infty)$ ならば，$\phi_j(f_n) \to \phi_j(f)$, $j = 1, 2$, $(n \to \infty)$ であり，したがって，$(\phi_1 + \phi_2)(f_n) \to (\phi_1 + \phi_2)(f)$ $(n \to \infty)$ となるからである．同様に，$\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ と複素数 λ に対して，

$$(\lambda\phi)(f) = \lambda\phi(f), \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tag{C.3}$$

---

*3 各 $x \in \mathbb{R}^d$ ごとに，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ が成り立つとき，$\{f_n\}_n$ は f に**各点収束** (point-wise convergence) するという．

*4 位相空間の概念は一般的に定義されるが，ここではそれは必要ないので省略する．

によって定義される $\lambda\phi$ も超関数である．こうして，超関数の空間 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ には，和とスカラー倍（複素数倍）の演算が定義され，$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ は，これらの演算に関して複素ベクトル空間になる．

超関数の空間 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ にも位相が定義される．すなわち，超関数列 $\{\phi_n\}_n$ に対して，超関数 ϕ があって，すべての $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(f) = \phi(f)$$

が成立するとき，$\{\phi_n\}_n$ は ϕ に（**超関数の意味で**）**収束する**といい，$\lim_{n\to\infty}\phi_n = \phi$ と書く．明確さを期す場合には，$\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \phi$ あるいは $\lim_{n\to\infty}\phi_n = \phi$（$\mathcal{D}'$ 収束）と書く．こうして，$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ は位相線形空間になる．

超関数列 $\{\phi_n\}_n$ について，すべての $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ に対して，複素数列 $\{\phi_n(f)\}_n$ がコーシー列であるとき（したがって，$\{\phi_n(f)\}_n$ は $\mathbb{C}$ の収束列），$\{\phi_n\}_n$ を $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ の**コーシー列**あるいは**基本列**とよぶ．超関数の空間に関する次の定理は基本的である．

定理 C.2 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ の任意のコーシー列は収束列である．すなわち，任意のコーシー列 $\{\phi_n\}_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ に対して，$\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ が存在して，$\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \phi$ となる．

定理 C.2 にいう性質を $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ の**完備性**という．

付録 B の B.1 節で見たように，普通の関数に対して，台という概念が定義された．超関数に対しても次に述べるように，台という概念が定義される．

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を開集合とし，$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ の関数で Ω の中に台をもつものの全体を $\mathcal{D}(\Omega)$ と記す．$\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ としよう．任意の $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して，$\phi(f) = 0$ が成り立つような最大の開集合 Ω の補集合を ϕ の**台**とよび，これを $\operatorname{supp}\phi$ と記す．

普通の関数の正値性の概念も超関数に拡大される．すなわち，超関数 $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ が非負であるというのは，$f \geq 0$ なる任意の $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ に対して $\phi(f) \geq 0$ が成り立つことをいう．ϕ が非負であることを $\phi \geq 0$ と記す．この正値性の概念を用いると，超関数の空間にひとつの順序関係 $\leq$ が導入される．すなわち，$\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ に対して $\phi_1 - \phi_2$ が非負ならば，$\phi_2 \leq \phi_1$ と定義する[*5]．

任意の $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ に対して $\phi(f)^* = \phi(f^*)$ をみたす超関数 ϕ を**実超関数**という[*6]．これは，実数値関数の一般化された概念である．

任意の $u \in \mathsf{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ と $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$uf \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ であることは容易にわかる．つまり，$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ は，C^∞ 関数をかける演算によって不変である．したがって，任意の $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ に対して，

$$\phi_u(f) = \phi(uf), \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tag{C.4}$$

---

*5 $\phi_1 \geq \phi_2$ とも書く．

*6 複素数 z に対して，z^* は z の共役複素数を表わす．

によって，$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数 ϕ_u が定義される．$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f \quad (n \to \infty)$ のとき，$uf_n \xrightarrow{\mathcal{D}} uf$ であるから，$\phi_u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ となる．この超関数 ϕ_u を u と ϕ の**積**とよび，$u\phi$ と書く．したがって，$(u\phi)(f) = \phi(uf)$.

超関数の例をみよう．

C.2.1 局所可積分関数の空間

$1 \le p < \infty$ としよう．任意の有界閉集合 $K \subset \mathbb{R}^d$ に対して，

$$\int_K |f(x)|^p dx < \infty$$

となる可測関数 f は **p 乗局所可積分**であるといい，そのような関数の全体を $\mathsf{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ で表わす[*7]．容易にわかるように，$f \in \mathsf{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ であることと，任意の $R > 0$ に対して，$\int_{|x|\le R} |f(x)|^p dx < \infty$ であることは同値である．

特に，$\mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ の元を**局所可積分関数** (locally integrable function) という．

たとえば，$\mathbb{R}^d$ 上の任意の連続関数は p 乗局所可積分である．これは，任意の連続関数は有界閉集合上で最大値をもつ，という初等解析学の基本的事実と有界閉集合のルベーグ測度は有限であることを使えば容易にわかる．

一般的に，$p \ge 1$ ならば

$$\mathsf{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) \subset \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) \tag{C.5}$$

という関係が成り立つ．なぜなら，K を有界閉集合，$f \in \mathsf{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$，$p^{-1} + q^{-1} = 1$，とすれば，ヘルダー (Hölder) の不等式[*8]により

$$\begin{aligned}\int_K |f(x)|dx \ &\le \ \left(\int_K |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left\{\int_K 1^q dx\right\}^{1/q} \\ &= \left(\int_K |f(x)|^p dx\right)^{1/p} |K|^{1/q} < \infty\end{aligned}$$

となるからである．ここで，$|K|$ は K のルベーグ測度を表わす．

集合 $\mathsf{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ $(1 \le p < \infty)$ はベクトル空間である．$f_n \in \mathsf{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ が $f \in \mathsf{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ に収束することを

$$\int_K |f_n(x) - f(x)|^p dx \to 0 \ (n \to \infty)$$

がすべての有界閉集合 K に対して成り立つことであると定義する．これによって，$\mathsf{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ は位相空間になる．

---

*7 "loc"は "local"(局所的) の略．

*8 付録Dを参照．

任意の $g \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ を固定し，$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ 上の汎関数 ϕ_g を

$$\phi_g(f) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)f(x)dx, \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tag{C.6}$$

によって定義しよう．関数 g の局所可積分性により，

$$C_f(g) := \int_{\mathrm{supp}\, f} |g(x)|dx, \tag{C.7}$$

は有限であり，

$$\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)f(x)|dx = \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|\ |f(x)|dx \leq C_f(g)\|f\|_\infty < \infty.$$

が成り立つ．ただし，

$$\|f\|_\infty := \mathrm{ess.sup}_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|. \tag{C.8}$$

したがって，$\phi_g(f)$ はすべての $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ に対して定義され，

$$|\phi_g(f)| \leq C_f(g)\|f\|_\infty, \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tag{C.9}$$

が成り立つ．$\phi_g(f)$ が f について線形であることは明らかである．さて，$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f \quad (n \to \infty)$ としよう．K を $\mathrm{supp}\, f_n, \mathrm{supp}\, f \subset K$ となる有界閉集合とすれば，

$$C_{f_n - f}(g) \leq \int_K |g(x)|dx \equiv C$$

であるから，

$$|\phi_g(f_n) - \phi_g(f)| = |\phi_g(f_n - f)| \leq C\|f_n - f\|_\infty.$$

一方，$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f \quad (n \to \infty)$ ならば，$\|f_n - f\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$ であるから，上の不等式から，$\phi_g(f_n) \to \phi_g(f) \quad (n \to \infty)$ となる．したがって，ϕ_g は超関数である．こうして，各 $g \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ に対して，超関数 ϕ_g が対応することがわかった．この対応は 1 対 1 であろうか．この問いに答えるのが次の補題である．

補題 C.3 ドゥ・ボワ・レイモン (du Bois-Reymond) **の補題.** Ω を $\mathbb{R}^d$ の任意の開集合とし，$g \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ とする．もし，すべての $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して，$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)f(x)dx = 0$ ならば，$g(x) = 0$, a.e.$x \in \Omega$ である．

この補題は，$\mathbb{R}^d$ 上の解析学のひとつの基礎をなす補題であり，**変分法の基本補題**ともよばれる．証明については，たとえば，黒田成俊『関数解析』(共立出版，1980) の 6.2 節，L. シュワルツ『物理数学の方法』(岩波書店) の 2 章を参照されたい．

補題 C.3 を用いると，$g, h \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ が $\phi_g = \phi_h$ をみたすならば，$g = h$ a.e. であることがわかる．実際，$\phi_g = \phi_h$ は，すべての $f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\phi_g(f) = \phi_h(f)$ であること，すなわち，$\int_{\mathbb{R}^d}(g(x) - h(x))f(x)dx = 0$ を意味するから，補題 C.3 によって，$g(x) - h(x) = 0$ a.e.x となる．したがって，$\mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ から $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ への写像 $\phi : g \to \phi_g$ は 1 対 1 である．この写像は $\mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ の $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ への埋め込みをあたえる．この意味で $g \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ と ϕ_g を同一視して，$\phi_g(f) = g(f)$ と書く．この同一視の意味で，

$$\mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)' \tag{C.10}$$

が成り立つことが示されたことになる．特に，$\mathsf{C}(\mathbb{R}^d)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の連続関数の全体とすれば，これは $\mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ の部分空間であるから，

$$\mathsf{C}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'. \tag{C.11}$$

こうして，超関数は確かに通常の関数の一般化になっていることがわかる．

もし，g が連続関数で，その台が K であるとすれば，超関数 ϕ_g の台も K である．これは次のようにしてわかる．$f \in \mathcal{D}(K^c)$ とすれば，$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)f(x)dx = 0$ であるから，$\phi_g(f) = 0$. 仮に，K^c より真に大きな開集合 Ω があって，すべての $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して，$\phi_g(f) = 0$ としてみよう．このとき，$\Omega \setminus \overline{K^c}$ は開集合である．この集合の中の任意の一点 a をとると，$g(a) \neq 0$ であり，g は連続関数であるから，a の十分小さな近傍 U_a で $\bar{U}_a \subset \Omega$ をみたし，U_a 上では $g(x)$ が定符号であるようなものが存在する．そこで，$x \in U_a$ に対して，$g(x) > 0$ として一般性を失わない．一方，$x \in U_a$ ならば，supp $f \subset U_a$ かつ U_a の内部で $f(x) > 0$ をみたす $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ がとれる．すると，$\phi_g(f) = \int_{U_a} g(x)f(x)dx > 0$ となるから矛盾である．よって，ϕ_g の台は K である．

$g \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ が非負であれば，$\phi_g \geq 0$ となることは明らかであろう．この意味で，確かに，超関数の非負性の概念は関数のそれのある種の一般化になっているといえる．

超関数 ϕ が上述した意味で局所可積分関数 g によってあたえられる場合，ϕ は関数 g と同一視できる，という言い方をする．もちろん，この同一視は，ルベーグ測度についてほとんどいたるところの点におけるそれである．

局所可積分関数に関する上述の事実に基づいて，超関数 ϕ が局所可積分関数であたえられない場合でも，**超関数核**とよばれる，象徴としての記号 $\phi(x)$ を導入し，

$$\phi(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)f(x)dx \tag{C.12}$$

というふうに書くことがある（$g \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ に対する超関数 ϕ_g の超関数核は $g(x)$ である）．超関数 ϕ_1, ϕ_2 に対して，$\phi_1 = \phi_2$ のこと（すなわち，$\phi_1(f) = \phi_2(f), \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$）を象徴的に $\phi_1(x) = \phi_2(x)$ と表わす．

次の事実も応用上重要である．

定理 C.4 $\mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ の関数 g_n が $\mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ の位相で $g \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ に収束するとしよう．このとき，$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ の位相で，g_n は g に収束する．

証明 任意の $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ に対して，(C.9) によって，$|g_n(f)-g(f)| \le C_f(g_n-g)\|f\|_\infty$. 仮定から，$C_f(g_n-g) \to 0$ $(n \to \infty)$ となるから，$g_n(f) \to g(f)$ $(n \to \infty)$ である． □

C.2.2 ディラックのデルタ超関数

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ の任意の点 a を固定し，$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数 δ_a を

$$\delta_a(f) = f(a), \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tag{C.13}$$

によって定義する．$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f \quad (n \to \infty)$ とすれば，$\|f_n - f\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$ であるから，当然，各 $x \in \mathbb{R}^d$ に対して，$f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ である．したがって，$\delta_a(f_n) \to \delta_a(f)$ $(n \to \infty)$ となる．ゆえに，$\delta_a \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$, すなわち，$\delta_a$ は超関数である．これを点 a に質量をもつ，d 次元の**ディラック** (P. A. M. Dirac) **のデルタ超関数**という．考えている次元を明確にしたい場合は，$\delta_a = \delta_a^d$ と書く．

関数 $f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ が $\mathrm{supp}\, f \subset \mathbb{R}^d \setminus \{a\}$ をみたすならば，$f(a) = 0$ であるから，$\delta_a(f) = 0$. したがって，δ_a の台は $\{a\}$ である：

$$\mathrm{supp}\, \delta_a = \{a\}. \tag{C.14}$$

容易にわかるように，δ_a は実超関数である．さらに，$f \ge 0$ ならば，$f(a) \ge 0$ であるから，$\delta_a(f) \ge 0$ である．ゆえに，δ_a は非負の超関数である．

$a = 0$ のとき δ_a を単に δ 記す：

$$\delta_0 = \delta. \tag{C.15}$$

ここで，ディラックのデルタ超関数について若干の注意をしておこう．この超関数は，歴史的には，量子力学の理論的整備の過程で Dirac によって導入された．彼は，次の性質をみたす $\mathbb{R}$ 上の関数 $\delta(x)$—“デルタ関数”—を仮想的に導入した：

$$\delta(x) = \delta(-x), \tag{C.16a}$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & ; x \ne 0 \\ +\infty & ; x = 0 \end{cases} \tag{C.16b}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1. \tag{C.16c}$$

ついでに言えば，d 次元のデルタ関数 $\delta^d(x)$ は，1 次元のデルタ関数の積 $\delta^d(x) = \delta(x_1)\cdots\delta(x_d)$ によって定義される．しかし，J. von Neumann が指摘したように，このような関数 $\delta(x)$ はルベーグ可測関数としては存在しない．実際，もし，そのようなルベーグ可測関数 $\delta(x)$ が存在したとすれば，性質 (C.16b) は $\delta(x) = 0$ a.e.（ルベーグ測度について）を意味する（$\{0\}$ のルベーグ測度は 0 であることに注意）．したがって，(C.16c) の左辺の積分をルベーグ積分の意味でとると，それは 0 に等しい．だが，これは (C.16c) の右辺と矛盾する．

この von Neumann の指摘によって，ディラックのデルタ関数の数学的実在性は，数学者からは，当初，疑問視された．この疑義が完全にとりはらわれるためには，L. シュワルツの超関数論 (1950～51) の出現を待たねばならなかった．この理論によって，はじめて，$\delta^d(x)$ に厳密な意味があたえられたのである．すなわち，シュワルツの超関数論では，$\delta^d(x)$ を上述の意味でのデルタ超関数 δ_0^d の超関数核とみなおすのである：

$$\delta_0^d(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \delta^d(x)f(x)dx, \quad f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d). \tag{C.17a}$$

なお，超関数 δ_a^d の超関数核は $\delta^d(x-a)$ とみる：

$$\delta_a^d(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \delta^d(x-a)f(x)dx, \quad f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d). \tag{C.17b}$$

このような歴史的経緯によって，超関数 δ_a は，慣習的には，“ディラックのデルタ関数”とよばれる場合がある．だが，すでに注意したように，それはルベーグ可測関数ではありえないので，この呼称は誤解を招く言い方である．

これと関連して，δ_a は局所可積分関数から決まる超関数ではありえないことを示すことができる．実際，仮に，$\delta_a(f) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)f(x)dx$, $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, をみたす $g \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ があったとしよう．このとき，$f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{a\})$ とすれば，$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)f(x)dx = 0$. ゆえに，ドゥ・ボワ・レイモンの補題により，$g(x) = 0$, a.e.$x \in \mathbb{R}^d \setminus \{a\}$. 1 点からなる集合 $\{a\}$ のルベーグ測度は 0 であるから，結局，$g(x) = 0$, a.e.$x \in \mathbb{R}^d$. これは，すべての $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ に対して $\delta_a(f) = 0$ を意味するので矛盾である．

しかし，こうした事情にもかかわらず，$\delta^d(x-a)$（あるいは単に $\delta(x-a)$ と記す）という象徴的記法は有用である．シュワルツの超関数論によってあたえられる，その厳密な意味さえつかんでいれば混乱の恐れはない[*9]．本書でも，しばしば，記号 $\delta^d(x-a)$ を用いる．

デルタ超関数に対する (C.16a)～(C.16c) の描像も直観的には適切なものであることが次の命題によって示される．

---

*9 たとえば，積 $\delta(x)\delta(x)$ は意味をもたない．

命題 C.5 $\varrho \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^d)$ とし，$\int_{\mathbb{R}^d} \varrho(x)dx = 1$ をみたすとする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して関数 $\varrho_\varepsilon \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^d)$ を

$$\varrho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\varrho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{C.18}$$

によって定義する．このとき，任意の $a \in \mathbb{R}^d$ と $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \varrho_\varepsilon(x-a)f(x)dx = \delta_a(f). \tag{C.19}$$

証明 変数変換 $y = (x-a)/\varepsilon$ をすることにより，

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varrho_\varepsilon(x-a)f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varrho(y)f(a+\varepsilon y)dy$$

明らかに，$\lim_{\varepsilon\to 0} \varrho(y)f(a+\varepsilon y) = \varrho(y)f(a)$．さらに，$|\varrho(y)f(a+\varepsilon y)| \leq |\varrho(y)|\,\|f\|_\infty$ であり，この右辺は ε によらない可積分関数である．したがって，ルベーグの優収束定理により，$\varepsilon \to 0$ のとき，

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varrho_\varepsilon(x-a)f(x)dx \to \int_{\mathbb{R}^d} \varrho(y)f(a)dy = f(a).$$

ゆえに，(C.19) を得る． □

(C.19) は，関数 $\varrho_\varepsilon(\,\cdot\,-a)$ が，$\varepsilon \to 0$ のとき，超関数の意味で δ_a に収束することを示している．

命題 C.5 における関数 ϱ の例としては，たとえば，ガウス型関数

$$\varrho(x) = \frac{1}{\pi^{d/2}}e^{-x^2}$$

がある．この場合，

$$\varrho_\varepsilon(x-a) = \frac{1}{(\varepsilon^2\pi)^{d/2}}e^{-|x-a|^2/\varepsilon^2}$$

であるから，この関数のグラフは，$\varepsilon \to 0$ のとき，点 $x = a$ のところに集中してくることがわかる．

実際，

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varrho_\varepsilon(x-a) = \begin{cases} 0 & ; x \neq a \\ +\infty & ; x = a \end{cases}$$

となっている．これは，ちょうど (C.16a)～(C.16c) に対応する描像である．$\varrho_\varepsilon(x-a)$ は関数としては，ほとんどいたるところ 0 に収束するのでつまらないのであるが，収束のとりかたを変えることにより，デルタ超関数という興味のある対象がつかまえられるのである．

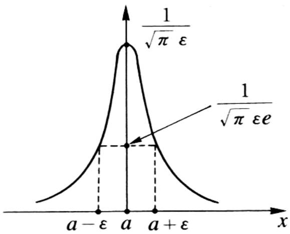


図 C.1 関数 $\varrho_\varepsilon(x-a)$ （$d=1$ の場合）

一般に，ある位相ではとらえられない対象でも別の位相ではとらえられる可能性がある．超関数論は，関数解析におけるこの基本的理念を関数の集合に適用したものにほかならない．すなわち，関数の収束の意味を変えることによって，通常の関数のクラスを含む非常に広い数学的対象がとらえられたのである．位相というのは，関数空間等，諸々の空間に存在する数学的対象をつかまえる網のようなものである．網が粗ければ取りこぼすものもある．古典解析の網（各点収束，一様収束）はある意味で粗かったのである．

デルタ超関数に関する基本的な公式をひとつ述べておこう．1 次元のデルタ超関数 δ と任意の $a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ に対して，

$$x^n\delta_a = a^n\delta_a \tag{C.20}$$

が成り立つ（超関数核を使って書けば，$x^n\delta(x-a) = a^n\delta(x-a)$ ということ）．実際，任意の $f\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対して，

$$(x^n\delta_a)(f) = \delta_a(x^nf) = a^nf(a) = a^n\delta_a(f).$$

(C.20) で $a=0$ の場合を考えると，

$$x^n\delta(x) = 0, \quad n\geq 1, \tag{C.21}$$

を得る．

C.3 超関数の微分

$\phi\in \mathsf{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ ならば，任意の多重指数 α に対して[*10]，部分積分公式

$$\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)\partial^\alpha f(x)dx \;=\; (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^d}\partial^\alpha\phi(x)f(x)dx, \qquad f\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \quad j=1,\cdots,d, \tag{C.22}$$

[*10] 多重指数については，付録 B の B.1 節を参照．

が成り立つ．$\mathsf{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ の関数は $\mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ に属するから超関数である．(C.22) を超関数の記法で表わせば

$$\partial^\alpha\phi(f) = (-1)^{|\alpha|}\phi(\partial^\alpha f) \tag{C.23}$$

となる．超関数 ϕ の微分は，ϕ が $\mathsf{C}^m(\mathbb{R}^d)$ (m 回連続微分可能な関数の全体) のときには，$|\alpha| \le m$ なる任意の多重指数 α に対して (C.23) が成立するような仕方で定義するのが自然である．これは実際可能であって，以下のような手続きによってなされる．まず，任意の多重指数 α と $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ に対して，$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数 ϕ_α を

$$\phi_\alpha(f) = (-1)^{|\alpha|}\phi(\partial^\alpha f), \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d),$$

によって定義する．$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f \quad (n \to \infty)$ ならば，$\partial^\alpha f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \partial^\alpha f$ であるから，ϕ_α は $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ の位相で連続である．すなわち，ϕ_α は超関数である．この超関数を $D^\alpha\phi$ と書き，これを ϕ に対する $|\alpha|$ 階の**超関数の意味での偏導関数**あるいは**導超関数**とよぶ．したがって，

$$D^\alpha\phi(f) = (-1)^{|\alpha|}\phi(\partial^\alpha f), \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tag{C.24}$$

が成り立つことになる．D^α を $|\alpha|$ 階の**超関数の意味での偏微分演算子**または $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ **上の偏微分演算子**という．

特に，$\alpha = (0, \cdots, 0, \alpha_j, 0, \cdots, 0)$ (j 成分以外は 0) の場合，

$$D^\alpha = D_j^{\alpha_j} \tag{C.25}$$

と記す．このとき，任意の多重指数 α に対して

$$D^\alpha\phi = D_1^{\alpha_1}\cdots D_d^{\alpha_d}\phi, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)', \tag{C.26}$$

が成り立つ．ここで，右辺の偏微分の順序は任意でよい．

容易にわかるように，$\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ が微分可能な関数であれば，その導超関数は対応する同じ階数の偏導関数と一致する．

すでに述べたように，任意の $u \in \mathsf{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ と $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ に対して，積 $u\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ が定義された．この積に関する微分については，通常の関数の場合と同様に，ライプニッツの規則が成り立つ：

$$D_j^n(u\phi) = \sum_{r=0}^n {}_nC_r D_j^{n-r}u D_j^r\phi. \tag{C.27}$$

証明は容易だから，読者の演習とする．

量子力学において現われる，超関数の意味での偏微分演算子で基本的なものは

$$\Delta = \sum_{j=1}^{d} D_j^2 \tag{C.28}$$

によって定義される d 次元**ラプラシアン**である．

超関数に導超関数を対応させる写像 D^α は $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ からそれ自身への写像であり，線形であることは定義から容易にわかる．さらにこの写像は連続である．すなわち，次の定理が成り立つ．

定理 C.6 $\phi_n, \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)', \phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \phi \quad (n \to \infty)$, ならば，任意の多重指数 α に対して，$D^\alpha \phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} D^\alpha \phi \ (n \to \infty)$.

証明 $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ とすれば，

$$D^\alpha \phi_n(f) = (-1)^{|\alpha|} \phi_n(\partial^\alpha f) \to (-1)^{|\alpha|} \phi(\partial^\alpha f) = D^\alpha \phi(f).$$

したがって，求める結果を得る． □

例 C.1 $\mathbb{R}$ 上の関数 $|x|$ は局所可積分であるから超関数である．D_x を $\mathcal{D}(\mathbb{R})'$ 上の微分演算子とする．任意の $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対して，

$$\begin{aligned}(D_x|x|)(f) &= -|x|(f') = -\int_0^\infty x f'(x)dx + \int_{-\infty}^0 x f'(x)dx \\ &= \int_0^\infty f(x)dx - \int_{-\infty}^0 f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \varepsilon(x) f(x)dx.\end{aligned} \tag{C.29}$$

ただし，$\varepsilon(x)$ は**符号関数**とよばれる関数で

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases} \tag{C.30}$$

によって定義される*11．したがって，

$$D_x|x| = \varepsilon(x) \tag{C.31}$$

*11 $\{0\} \subset \mathbb{R}$ はルベーグ測度 0 の集合であるから，(C.29) の最後の積分においては，$\varepsilon(x)$ の $x = 0$ での値が何であるかは問題にならない（したがって，この場合，$\varepsilon(0)$ はどう定義してもよい）．付録 A で注意したように，ルベーグ積分においては，扱う関数はほとんどいたるところ定義されていれば十分なのである．

を得る．

同様にして

$$D_x^2|x| = D_x\varepsilon(x) = 2\delta(x) \tag{C.32}$$

を証明できる．実際，任意の $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対して，(C.31) により，

$$\begin{aligned}(D_x^2|x|)(f) &= -(D_x|x|)(f') = -\int_{\mathbb{R}} \varepsilon(x)f'(x)dx \\ &= -\int_0^\infty f'(x)dx + \int_{-\infty}^0 f'(x)dx = 2f(0) = 2\delta(f).\end{aligned}$$

したがって，$D_x|x|^2 = 2\delta$.

例 C.2 $x \geq 0$ ならば $\theta(x) = 1$, $x < 0$ ならば $\theta(x) = 0$ によって定義される関数 θ を**ヘヴィサイド** (Heavisude) **関数**という．これは，局所可積分関数であから超関数である．この関数の超関数の意味での微分を求めてみよう．任意の $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$(D_x\theta)(f) = -\theta(f') = -\int_0^\infty f'(x)dx = f(0) = \delta(f).$$

したがって，

$$D_x\theta(x) = \delta(x). \tag{C.33}$$

例 C.3 $\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ とし，Δ を超関数の意味での 2 次元ラプラシアンとする．このとき，任意の $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ に対して，超関数の等式

$$\Delta \log|\mathbf{r} - \mathbf{a}| = 2\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \tag{C.34}$$

が成り立つ[*12].

例 C.4 **デルタ超関数の微分**．任意の自然数 n と $j = 1, \cdots, d$, に対して

$$(D_j^n\delta_a)(f) = (-1)^n\delta_a(\partial_j^n f) = (-1)^n(\partial_j^n f)(a), \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d).$$

一般に，超関数 $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ の台が何個かの点の集合 $\{a_1, \cdots, a_n\} \subset \mathbb{R}^d$ に等しいとき，ϕ は点 $a_1, \cdots, a_n$, に**集中している**という．

たとえば，デルタ超関数 δ_a とそのすべての導超関数は点 a に集中している．したがって，それらの有限一次結合も点 a に集中している．実は，この逆も成り立つ[*13].

[*12] 証明については，たとえば，L. シュワルツ『物理数学の方法』（岩波書店）の 2 章，定理 6 を参照．

[*13] 証明については，たとえば，I. M. Gel'fand and G. E. Shilov: *Generalized Functions* Vol.II (Academic Press, 1968) の 2 章 4.5 節を参照．簡単な場合については，L. シュワルツ『物理数学の方法』（岩波書店）の 2 章，定理 8 を参照．

定理 C.7　$\mathbb{R}^d$ 上の超関数 ϕ が点 a に集中しているとする．このとき，ϕ は，δ_a とその導超関数 $D^\alpha \delta_a$ の有限一次結合で表わされる．すなわち，定数 $C_\alpha \in \mathbb{C}$ が存在して，

$$\phi = \sum_\alpha C_\alpha D^\alpha \delta_a$$

と書ける．ただし，右辺の多重指数が動く範囲は有限である（この範囲は ϕ ごとに定まる）．

C.4　緩増加超関数

超関数のうちで，その定義域を $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ よりも広い空間に拡大できるものが存在する．そのような超関数を以下に定義する．付録 B で $\mathbb{R}^d$ 上の急減少関数の空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ を導入した．この空間にも $\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ の位相とは異なる位相を定義できる．$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，非負整数 m と多重指数 α とによって指定される量 $\|f\|_{m,\alpha}$ を

$$\|f\|_{m,\alpha} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1+|x|)^m |\partial^\alpha f(x)| \tag{C.35}$$

によって定義する．これが有限であることは容易にわかる．$\|\cdot\|_{m,\alpha}$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上のひとつのノルムである．ノルムの系 $\{\|\cdot\|_{m,\alpha}\}_{m,\alpha}$ を用いて，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に位相が導入される．すなわち，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の関数列 $\{f_n\}_n$ が $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に収束するとは，すべての非負整数 m とすべての多重指数 α に対して，$\|f_n - f\|_{m,\alpha} \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つことと定義するのである．このことを $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f \quad (n \to \infty)$ とも記す．次の事実は基本的である．

命題 C.8　$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ において稠密である．すなわち，任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ の関数列 f_n が存在して $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f \quad (n \to \infty)$ となる．

証明　概略だけを示す．次の三つの条件をみたす関数 $\varrho \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ をひとつ固定する：(i) $0 \le \varrho(x) \le 1$, $x \in \mathbb{R}^d$; (ii) $|x| \le 1/2$ ならば $\varrho(x) = 1$; (iii) $|x| \ge 1$ ならば $\varrho(x) = 0$. $n = 1, 2, \cdots,$ に対して，$\varrho_n(x) = \varrho(x/n)$ とし，$f_n = \varrho_n f$ とおく．このとき，$f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ であり，

$$\begin{aligned}\partial^\alpha f_n &= \sum_{k_1=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{k_d=0}^{\alpha_d} {}_{\alpha_1}C_{k_1} \cdots {}_{\alpha_d}C_{k_d} n^{-|k_1|-\cdots-|k_d|} \\ &\quad \times (\partial^{k_1+\cdots+k_d}\varrho)(x/n)(\partial^{\alpha-k_1-\cdots-k_d} f)(x)\end{aligned}$$

に注意すれば，$f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f \quad (n \to \infty)$ となることがわかる．□

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の連続線形汎関数を**緩増加超関数** (tempered distribution) という．すなわち，ϕ が緩増加超関数であるとは，それが $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ から $\mathbb{C}$ への写像であって，次の二つの条件をみたすときをいう：

(i) （線形性）$\phi(\lambda f + \mu g) = \lambda\phi(f) + \mu\phi(g), \quad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

(ii) （連続性） $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f \quad (n \to \infty)$ ならば，$\phi(f_n) \to \phi(f)\ (n \to \infty)$.

緩増加超関数の全体を $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ または $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^*$ と記す．

$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ とし，$f_n, f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ が $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f \quad (n \to \infty)$ をみたすとしよう．このとき，$K \subset \mathbb{R}^d$ を $(\cup_n \mathrm{supp}\, f_n) \cup \mathrm{supp}\, f \subset K$ なる有界閉集合とすれば，任意の非負整数 m と多重指数 α に対して

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_{m,\alpha} &\le \sup_{x\in K}(1+|x|)^m \sup_{x\in K} |\partial^\alpha (f_n(x) - f(x))| \\ &\to 0\ (n \to \infty)\end{aligned}$$

となるので，$f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f \quad (n \to \infty)$. したがって，$\phi(f_n) \to \phi(f)\ (n \to \infty)$. ゆえに，$\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$. こうして

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)' \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)' \tag{C.36}$$

という包含関係が成り立つことがわかる．

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数が緩増加超関数であるための必要十分条件は次の定理によってあたえられる．

定理 C.9 ϕ を $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数とする．このとき，$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ であるための必要十分条件は，ある非負整数の有限個の組 $m_1, \cdots, m_n$ と多重指数の組 $\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(n)}$ および定数 $C > 0$ が存在して，不等式

$$|\phi(f)| \le C \sum_{j=1}^{n} \|f\|_{m_j, \alpha^{(j)}}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \tag{C.37}$$

が成り立つことである．

証明 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数 ϕ が (C.37) をみたせば，ϕ が連続になるので，$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ である．条件の必要性の証明は省略する． □

例 C.5 $\mathbb{R}$ 上の関数 $\phi(x) = e^{x^4}$ は超関数であるが緩増加ではない．なぜなら，$f(x) = e^{-x^2}$ とすれば，$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ であるが，

$$\phi(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{x^4} e^{-x^2} dx = +\infty.$$

となるからである．この例が暗示するように，一般に，無限遠での増大度が指数関数的な連続関数は緩増加超関数にならないのである．

例 C.6 $\mathbb{R}$ 上の単項式 $\phi(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ は $\mathbb{R}$ 上の緩増加超関数である．実際，$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ とすれば，

$$\begin{aligned} |\phi(f)| &\le \int_{\mathbb{R}} |x|^n |f(x)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} \cdot (1+x^2)|x|^n |f(x)| dx \\ &\le C(\|f\|_{n,0} + \|f\|_{n+2,0}). \end{aligned}$$

ただし，$C = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx < \infty$．したがって，定理 C.9 によって，$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ である．

$\mathbb{R}^d$ 上の関数 h が**多項式的に有界** (polynomially bounded) であるとは，ある自然数 m と定数 C が存在して，$|h(x)| \le C(1+|x|^m)$, $x \in \mathbb{R}^d$, が成り立つ場合をいう．前段と同様にして，**$\mathbb{R}^d$ 上の任意の多項式的に有界なボレル可測関数は緩増加超関数**であることが示される．

例 C.7 任意の $a \in \mathbb{R}^d$ と $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\delta_a(f) = f(a)$ と定義する．これはデルタ超関数の定義域を $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に拡大したものである．容易にわかるように，$|\delta_a(f)| = |f(a)| \le \|f\|_{0,0}$．したがって，$\delta_a$ は緩増加超関数である．

定理 C.10 $1 \le p \le \infty$ としよう．このとき，$\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$.

証明 $\phi \in \mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d), f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して $\phi(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) f(x) dx$ とおく．ヘルダーの不等式を用いると $|\phi(f)| \le \|\phi\|_{\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)} \|f\|_{\mathsf{L}^q(\mathbb{R}^d)}$．ただし，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$．一方，

$$\begin{aligned} \|f\|^q_{\mathsf{L}^q(\mathbb{R}^d)} &= \int \frac{1}{(1+|x|^{d+1})^q} \left\{(1+|x|^{d+1})|f(x)|\right\}^q dx \\ &\le C(|f|_{0,0} + |f|_{d+1,0})^q. \end{aligned}$$

ここで，$C = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|x|^{d+1})^{-q} dx < \infty$．したがって，

$$|\phi(f)| \le \|\phi\|_{\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)} C^{1/q} (\|f\|_{0,0} + \|f\|_{d+1,0}).$$

これは，写像 $f \to \phi(f)$ が $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の位相で連続であることを意味する（定理 C.9）． □

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ の列 $\{\phi_n\}_n$ が $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ に収束することを

$$\phi_n(f) \to \phi(f) \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

によって定義し，これを $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} f$ $(n \to \infty)$ とも記す．これによって，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ に位相が導入され，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ は位相線形空間になる．

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ の列 $\{\phi_n\}_n$ について，すべての $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\{\phi_n(f)\}_n$ が $\mathbb{C}$ のコーシー列であるとき，$\{\phi_n\}_n$ を $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ の**コーシー列**あるいは**基本列**という．

定理 C.11　$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ の任意のコーシー列は収束列である．すなわち，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ の任意の列 $\{\phi_n\}_n$ に対して，$\phi_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} \phi \quad (n \to \infty)$ となる $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ が存在する．

この定理に述べられた性質は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ の**完備性**とよばれる．

C.5　緩増加超関数のフーリエ変換

$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ に対して，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数 $\hat{\phi}$ を

$$\hat{\phi}(f) = \phi(\hat{f}), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \tag{C.38}$$

によって定義する．ただし，$\hat{f}$ は f のフーリエ変換である（付録 B を参照）．付録 B で示したように，$\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ であるから，$\hat{\phi}$ は確かに $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数である．$f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f \quad (n \to \infty)$ ならば，$\hat{f}_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \hat{f}$ を示すのは難しくない．したがって，$\hat{\phi}(f_n) \to \hat{\phi}(f) \quad (n \to \infty)$ となる．ゆえに，$\hat{\phi}$ は連続である．よって，$\hat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$．この緩増加超関数 $\hat{\phi}$ を ϕ の**フーリエ変換**という．

$\phi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ ならば，パーセヴァルの等式により，(C.38) が成り立つので，(C.38) はフーリエ変換の $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ への自然な拡張とみることができる．このことを考慮して，

$$\hat{\phi} = \mathcal{F}\phi, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)', \tag{C.39}$$

とも記す．

次の定理は重要である．

定理 C.12　フーリエ変換 $\mathcal{F}$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ からそれ自身への全単射であり，連続線形写像である．

証明　$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ に対して，$\mathcal{F}\phi = \hat{\phi} = 0$ とすれば，すべての $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\phi(\hat{f}) = 0$ である．$\mathcal{F}$ は，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の全射であったから，すべての $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\phi(g) = 0$ となる．したがって，$\phi = 0$. ゆえに $\mathcal{F}$ は 1 対 1 である．

任意の $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ に対して，写像 $\psi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ を

$$\psi(f) = \phi(\check{f}), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \tag{C.40}$$

によって定義すれば，$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の連続性により，$\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ であることがわかる．さらに，$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の全射性を用いると，(C.40) は $\hat{\psi}(f) = \phi(f)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, と等価になる．これは，$\mathcal{F}\psi = \phi$ を意味するので，$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)' \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ は全射であることが結論される．

$\phi_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} \phi \quad (n \to \infty)$ とすれば，$\hat{\phi}_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} \hat{\phi} \ (n \to \infty)$ となる．ゆえに，$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)' \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ は連続性である．　□

$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ に対して，(C.40) によって定義される緩増加超関数 ψ を ϕ の**逆フーリエ変換**といい，

$$\psi = \check{\phi} = \mathcal{F}^{-1}\phi \tag{C.41}$$

と記す．

C.6 基本的な緩増加超関数のフーリエ変換

C.6.1 デルタ超関数のフーリエ変換

任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ と $a \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_a(f) &= \delta_a(\hat{f}) = \hat{f}(a) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{-iak} f(k) dk.\end{aligned}$$

ゆえに，デルタ超関数のフーリエ変換 $\hat{\delta}_a$ は関数と同一視でき，

$$\hat{\delta}_a(k) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-iak} \tag{C.42}$$

となる．

C.6.2 単項式のフーリエ変換

$\mathbb{R}$ 上の超関数 $\phi(x) = x^n$ のフーリエ変換を求めてみよう．$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ とすれば，$\hat{\phi}(f) = \phi(\hat{f}) = \int_{\mathbb{R}} x^n \hat{f}(x) dx$．一方，

$$\begin{aligned}x^n \hat{f}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} i^n \frac{d^n e^{-ikx}}{dk^n} f(k) dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} (-i)^n e^{-ikx} \frac{d^n f(k)}{dk^n} dk \\ &= (-i)^n (\mathcal{F} f^{(n)})(x).\end{aligned}$$

したがって，

$$\hat{\phi}(f) = (2\pi)^{1/2} (-i)^n f^{(n)}(0) = (2\pi)^{1/2} (-i)^n \delta_0(f^{(n)}) = (2\pi)^{1/2} i^n \delta_0^{(n)}(f).$$

ゆえに，

$$\mathcal{F} x^n = (2\pi)^{1/2} i^n \delta_0^{(n)}(x). \tag{C.43}$$

すなわち，単項式 x^n のフーリエ変換はデルタ超関数の n 階の導超関数に比例する．

C.6.3　$\mathbb{R}^d$ 上の関数 $(k^2+1)^{-1}$ のフーリエ変換

関数 $(k^2+1)^{-1}$ $(k \in \mathbb{R}^d)$ は緩増加超関数である（$d \geq 2$ ならば，可積分ではないことに注意）．この超関数のフーリエ変換

$$G = \mathcal{F}((k^2+1)^{-1}) \tag{C.44}$$

を求めよう．これは，超関数方程式

$$(-\Delta + 1)G(f) = \delta(f) \tag{C.45}$$

をみたす．

$d = 1$ の場合は，留数定理を応用することにより，

$$G(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{C.46}$$

となることは容易にわかる．

$d \geq 2$ の場合は，次の定理が成り立つ．

定理 C.13　$d \geq 2$ とする．このとき，G は関数と同一視でき，

$$G(x) = G(x;d) := \frac{1}{2^{d/2}} \int_0^\infty t^{-d/2} \exp\left(-t - \frac{x^2}{4t}\right) dt \tag{C.47}$$

という表示をもつ．さらに，以下の (i)～(iii) が成立する．

(i)　$G(x;d) > 0,\ x \in \mathbb{R}^d$, であり，$G(x;d)$ は $|x|$ の単調減少関数である．

(ii)　任意の $R > 0$ に対して，定数 $C_R > 0$ が存在して，$|x| \geq R$ ならば

$$G(x;d) \leq C_R |x|^{-(d-2)/2} e^{-|x|}. \tag{C.48}$$

(iii)　十分小さな $\delta > 0$ に対して，定数 $C_j > 0, j = 1, 2,$ が存在して，$|x| < \delta$ ならば

$$C_1|x|^{-d+2} \leq G(x;d) \leq C_2|x|^{-d+2} \qquad (d \geq 3 \text{ のとき}), \tag{C.49a}$$

$$C_1|\ \log|x|\ | \leq G(x;d) \leq C_2|\ \log|x|\ | \qquad (d = 2 \text{ のとき}). \tag{C.49b}$$

証明　$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ とすれば，

$$G(f) = \int \frac{\hat{f}(k)}{k^2+1} dk.$$

ここで，

$$\frac{1}{k^2+1} = \int_0^\infty e^{-k^2 t} e^{-t} dt$$

と書けることに注意すれば，

$$G(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^\infty e^{-k^2 t} e^{-t} dt \right) \hat{f}(k) dk. \tag{C.50}$$

そこで，

$$|\hat{f}(k)| e^{-k^2 t} e^{-t} \leq |\hat{f}(k)| e^{-t}$$

に注意して，フビニの定理を応用すれば，(C.50) の右辺の積分順序の交換ができて，

$$G(f) = \int_0^\infty dt e^{-t} \int_{\mathbb{R}^d} dk \hat{f}(k) e^{-k^2 t}$$

を得る．変数 $k \in \mathbb{R}^d$ の関数 $e^{-k^2 t}$ $(t > 0)$ のフーリエ変換 $\mathcal{F}e^{-k^2 t}$ が

$$(\mathcal{F}e^{-k^2 t})(x) = \frac{1}{(2t)^{d/2}} e^{-x^2/4t}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{C.51}$$

となることを証明するのは困難ではない．これとパーセヴァルの等式により

$$\int_{\mathbb{R}^d} dk \hat{f}(k) e^{-k^2 t} = \frac{1}{(2t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-x^2/4t} dx$$

が得られる．したがって，

$$G(f) = \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{1}{(2t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-x^2/4t} dx.$$

ここでまた積分順序を交換するために，次のことに注意する：

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} t^{-d/2} |f(x)| e^{-x^2/4t} dx &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(\sqrt{t} y)| e^{-y^2/4} dy \\ &\leq C \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

ただし，$C = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-y^2/4} dy = (2\sqrt{\pi})^d < \infty$．したがって，累次積分

$$\int_0^\infty dt\, e^{-t} (2t)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| e^{-x^2/4t} dx$$

は有限である．ゆえに，フビニの定理が応用できるので，

$$G(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^\infty \frac{1}{(2t)^{d/2}} e^{-t} e^{-x^2/4t} dt \right) f(x) dx$$

となる．ゆえに，(C.47) を得る（$G(x;d)$ が局所可積分であることは容易にわかる）．

$G(x;d)$ に関する性質 (i) は，(C.47) から明らかであろう．

(C.48) を示すために，$x \neq 0$ として，(C.47) において，変数変換 $s = t/|x|$ をすれば

$$|x|^{(d-2)/2}G(x;d) = I_1(x) + I_2(x)$$

と書ける．ここで，

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int_0^{1/2} (2s)^{-d/2} e^{-h(s)|x|} ds, \quad I_2(x) = \int_{1/2}^{\infty} (2s)^{-d/2} e^{-h(s)|x|} ds, \\ h(s) &= s + \frac{1}{4s}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

関数 $h(s)$ は，$(0, 1/2]$ で単調減少，$[1/2, \infty)$ で単調増大であり，$h(s) \geq h(1/2) = 1$ である．そこで，変数変換 $h(s) = t$ を行なうと，$|x| \geq R > 0$ ならば，任意の $\delta > 0$ に対して，

$$\begin{aligned} e^{|x|} I_1(x) &= \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{e^{-(t-1)|x|}}{\sqrt{t^2-1}(t-\sqrt{t^2-1})^{(d-2)/2}} dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_1^{1+\delta} \frac{e^{-(t-1)|x|}}{\sqrt{t^2-1}(t-\sqrt{t^2-1})^{(d-2)/2}} dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{1+\delta}^{\infty} \frac{e^{-(t-1)|x|}}{\sqrt{t^2-1}(t-\sqrt{t^2-1})^{(d-2)/2}} dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_1^{1+\delta} \frac{1}{\sqrt{t^2-1}(t-\sqrt{t^2-1})^{(d-2)/2}} dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{1+\delta}^{\infty} \frac{e^{-(t-1)R}}{\sqrt{t^2-1}(t-\sqrt{t^2-1})^{(d-2)/2}} dt < \infty. \end{aligned}$$

したがって，$e^{|x|} I_1(x)$ は $|x| \geq R$ で有界な関数である．同様にして，$e^{|x|} I_2(x)$ も $|x| \geq R$ で有界であることが示される．以上から，$|x|^{(d-2)/2} e^{|x|} G(x;d)$ は $|x| \geq R$ で有界であることがわかる．ゆえに，(C.48) が成立する．

(C.47) で変数変換 $s = |x|^2/t$ を行なうと

$$|x|^{d-2} G(x;d) = 2^{-d/2} \int_0^{\infty} s^{(d-4)/2} e^{-s/4} e^{-x^2/s} ds.$$

被積分関数は，$s^{(d-4)/2} e^{-s/4} e^{-x^2/s} \leq s^{(d-4)/2} e^{-s/4}$ と評価される．$d \geq 3$ ならば，右辺は可積分関数である．したがって，ルベーグの優収束定理により，

$$\lim_{x \to 0} |x|^{d-2} G(x;d) = 2^{-d/2} \int_0^{\infty} s^{(d-4)/2} e^{-s/4} ds > 0.$$

ゆえに，(C.49a) を得る．

$d=2$ の場合は，

$$G(x;d)=\int_0^\infty \frac{e^{-|x|h(s)}}{2s}ds.$$

変数変換 $r=|x|h(s)$ をすれば

$$G(x;d)=\int_{|x|}^\infty \frac{e^{-r}}{\sqrt{r^2-|x|^2}}dr.$$

したがって，$|x|<\delta$ とすれば

$$\begin{aligned} G(x;d) \ &\geq \ e^{-\delta}\int_{|x|}^{\delta}\frac{1}{\sqrt{r^2-|x|^2}}dr \\ &= \ e^{-\delta}\left(-\log|x|+\log(\delta+\sqrt{\delta^2-|x|^2})\right). \end{aligned}$$

同様に，

$$G(x;d)\leq\int_{|x|}^{\delta}\frac{1}{\sqrt{r^2-|x|^2}}dr+\frac{1}{\sqrt{\delta^2-|x|^2}}\int_\delta^\infty e^{-r}dr.$$

これらの式から (C.49b) が得られる． □

積分表示 (C.47) は変形ベッセル関数 K_ν を用いて

$$G(x;d)=|x|^{-(d-2)/2}K_{(d-2)/2}(|x|) \tag{C.52}$$

と表わされる[*14]．上の証明は，ベッセル関数 $K_{(d-2)/2}$ のいくつかの性質を調べたことになる．

特に，(C.52) と変形ベッセル関数の性質により，$d=3$ の場合は，

$$G(x;3)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-|x|}}{|x|} \tag{C.53}$$

となる[*15]．

C.6.4 $\mathbb{R}^d$ 上の関数 $k_j(k^2+1)^{-1}$ のフーリエ変換

前項の結果を用いて，関数 $k_j(k^2+1)^{-1}, j=1,\cdots,d,$ のフーリエ変換

$$G_j:=\mathcal{F}(k_j(k^2+1)^{-1}) \tag{C.54}$$

[*14] たとえば，森口繁一 他『数学公式 III』（岩波書店）の第 3 章，p.187 を参照．

[*15] 前掲書の p.172 を参照．この場合，関数 $(k^2+1)^{-1}$ は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ であるから，L^2 関数としてのフーリエ変換を計算すればよい．

を求めてみよう．次の式変形は容易である：

$$
\begin{aligned}
G_j(f) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{k_j \hat{f}(k)}{k^2+1} dk = (-i) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(\mathcal{F}\partial_j f)(k)}{k^2+1} dk = (-i) G(\partial_j f) \\
&= (-i) \int_{\mathbb{R}^d} G(x;d) \partial_j f(x) dx. \qquad \text{(C.55)}
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
G_j = i D_j G(\,\cdot\,; d). \qquad \text{(C.56)}
$$

この右辺を計算するために，$\tilde{x} = (x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$ として，定数 $\varepsilon \in \mathbb{R}$ に対して，関数 $G_\varepsilon(\tilde{x}) = G(x_1, \cdots, \varepsilon, \cdots, x_d; d)$ を導入する．$G(x;d)$ は $|x|$ のみに依存する関数であるから，$G_\varepsilon = G_{-\varepsilon}$ が成り立つ．$G(x;d)$ が $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ では無限回微分可能であることを示すのはそれほど難しくはない（付録 A の定理 A.8 を応用すればよい．あるいは (C.52) とベッセル関数の性質を用いればよい）．したがって，(C.55) は次のように書き直せる：$\varepsilon > 0$ として，

$$
\begin{aligned}
G_j(f) &= (-i) \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_\varepsilon^\infty G(x;d) \partial_j f(x) dx_j \right) d\tilde{x} \right. \\
&\qquad \left. + \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} G(x;d) \partial_j f(x) dx_j \right) d\tilde{x} \right\} \\
&= i \lim_{\varepsilon \to 0} (I_\varepsilon + J_\varepsilon).
\end{aligned}
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
I_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} G_\varepsilon(\tilde{x}) \left\{ f(x_1, \cdots, \varepsilon, \cdots, x_d) - f(x_1, \cdots, -\varepsilon, \cdots, x_d) \right\} d\tilde{x} \\
J_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_\varepsilon^\infty [\partial_j G(x;d)] f(x) dx_j \right) d\tilde{x} \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} [\partial_j G(x;d)] f(x) dx_j \right) d\tilde{x}.
\end{aligned}
$$

定理 C.12 によって，

$$
0 < G(x;d) \le C r(x) e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^d.
$$

ただし，$C > 0$ は定数で，

$$
r(x) = \begin{cases} 1 + |x|^{-d+2} & ; d \ge 3 \text{ のとき} \\ 1 + |\ \log|x|\ | & ; d = 2 \text{ のとき} \end{cases}.
$$

したがって，C とは別の定数 C' があって，

$$0 < G_\varepsilon(\tilde{x}) \le C'(1 + r(|\tilde{x}|))e^{-|\tilde{x}|}$$

が成立する．$\mathbb{R}^{d-1}$ 上の可積分関数であるから，ルベーグの優収束定理により，$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = 0$ となることがわかる．したがって，

$$G_j(f) = i \lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon = i \int_{\mathbb{R}^d} [\partial_j G(x;d)] f(x) dx$$

を得る．(C.52) とベッセル関数の漸化式

$$zK'_\nu(z) + \nu K_\nu(z) = -zK_{\nu-1}(z)$$

を用いると

$$\begin{aligned} \partial_j G(x;d) &= -x_j |x|^{-(d+2)/2} \{(d-2)K_{(d-2)/2}(|x|) + |x| K_{(d-4)/2}(|x|)\}, \\ &\quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

となる．したがって，G_j は関数

$$\begin{aligned} G_j(x) &= i\partial_j G(x;d) \\ &= -ix_j |x|^{-(d+2)/2} \{(d-2)K_{(d-2)/2}(|x|) + |x| K_{(d-4)/2}(|x|)\}, \end{aligned} \tag{C.57}$$

と同一視できる．(C.52) を使えば，

$$G_j(x) = -ix_j |x|^{-2} \{(d-2)G(x;d) + G(x;d-2)\} \tag{C.58}$$

という関係式が成立する．こうして，

$$\begin{aligned} &(\mathcal{F}(k_j(k^2+1)^{-1}))(x) \\ &= -ix_j |x|^{-(d+2)/2} \{(d-2)K_{(d-2)/2}(|x|) + |x| K_{(d-4)/2}(|x|)\}, \end{aligned} \tag{C.59}$$

が得られる．

C.7 合 成 積

$f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，関数 $f * g$ を

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy \tag{C.60}$$

によって定義し，これを f と g の**合成積** (convolution) という．合成積の基本的性質は次の定理にまとめられる：

定理 C.14

(i) 各 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，写像 $g \to f * g$ は，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ から $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ への連続線形写像である．

(ii)

$$\widehat{fg} = (2\pi)^{-d/2}\hat{f} * \hat{g}, \quad \widehat{f * g} = (2\pi)^{d/2}\hat{f}\hat{g},$$
$$f * g = g * f, \quad f * (g * h) = (f * g) * h, \quad f, g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

合成積は，もっと広いクラスの関数 f, g に対しても定義されうる．実際，$f \in \mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d), g \in \mathsf{L}^q(\mathbb{R}^d)$ $(1 \leq p, q \leq \infty)$ ならば，(C.60) によって $f * g$ は定義され，$f * g \in \mathsf{L}^r(\mathbb{R}^d)$ であることが示される．ただし，$p^{-1} + q^{-1} = 1 + r^{-1}$ である．この場合，ヤング (Young) の不等式（付録 D を参照）が $\|f * g\|_{\mathsf{L}^r(\mathbb{R}^d)}$ に対する最良の評価をあたえる．

合成積は次のようにして緩増加超関数と急減少関数に対しても定義される．$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\tilde{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ を $\tilde{f}(x) = f(-x)$ によって定義する．$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ としよう．このとき，定理 C.14(i) のおかげで，

$$(\phi * f)(g) = \phi(g * \tilde{f}), \quad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \tag{C.61}$$

によって定義される，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数 $\phi * f$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ に属する．これを ϕ と f の**合成積**という．

各 $y \in \mathbb{R}^d$ に対して関数 f_y を $f_y(x) = f(y - x)$ によって定義する．

定理 C.15 各 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，写像 $\phi \to \phi * f$ は，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ から $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ への連続線形写像である．さらに，次の諸性質が成り立つ：

(i) 緩増加超関数 $\phi * f$ は多項式的に有界な無限回連続微分可能な関数と同一視でき，

$$(\phi * f)(y) = \phi(f_y), \quad y \in \mathbb{R}^d,$$

が成り立つ．さらに，任意の多重指数 α に対して

$$D^\alpha(\phi * f) = (D^\alpha \phi) * f = \phi * D^\alpha f.$$

(ii) $\widehat{\phi * f} = (2\pi)^{d/2}\hat{\phi}\hat{f}$.

(iii) $(\phi * f) * g = \phi * (f * g), \quad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

C.8　フリードリクスの軟化演算子

関数 $\varrho \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ で，条件

$$\varrho(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad |x| \geq 1 \text{ ならば } \varrho(x) = 0,$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} \varrho(x)dx = 1,$$

をみたすものを任意にひとつ選び，$\varepsilon > 0$ に対して，関数 ϱ_ε を (C.18) によって定義する．関数の族 $\{\varrho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ を**軟化子**という．容易にわかるように，$\varrho_\varepsilon \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d), \varrho_\varepsilon(x) \geq 0$ であり，

$$|x| \geq \varepsilon \text{ ならば } \varrho_\varepsilon(x) = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \varrho_\varepsilon(x)dx = 1,$$

が成立する．$f \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ ならば，

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varrho_\varepsilon(x-y)f(y)|dy \leq \frac{\|\varrho\|_\infty}{\varepsilon^d} \int_{|x-y|\leq\varepsilon} |f(y)|dy < \infty$$

であるから，演算子 J_ε が

$$(J_\varepsilon f)(x) = (\varrho_\varepsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varrho_\varepsilon(x-y)f(y)dy \tag{C.62}$$

によって定義される．この演算子を**フリードリクスの軟化演算子** (mollifier) という．これは次の有用な性質をもっている．

定理 C.16　(i) $f \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ が有界な台 K をもつならば，$J_\varepsilon f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ であって，$J_\varepsilon f$ の台は，K を ε だけふくらませた集合 $K_\varepsilon := \{x = x_1 + x_2 | x_1 \in K, |x_2| \leq \varepsilon\}$ に含まれる．

(ii) $f \in \mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ ならば，$J_\varepsilon f \in \mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ であり

$$\|J_\varepsilon f\|_p \leq \|f\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty, \tag{C.63}$$
$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \|J_\varepsilon f - f\|_p = 0, \quad 1 \leq p < \infty \tag{C.64}$$

が成り立つ．

(iii) f が $\mathbb{R}^d$ 上で有界かつ一様連続ならば，

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \|J_\varepsilon f - f\|_\infty = 0. \tag{C.65}$$

証明　(i) $J_\varepsilon f$ の台の特性は，実質的な積分範囲を考察することにより，容易にわかる．$J_\varepsilon f$ の微分可能特性を示すには，付録 A の定理 A.8 を応用すればよい．

(ii) ヤングの不等式（付録 D を参照）によって，$\|J_\varepsilon f\|_p \leq \|\varrho_\varepsilon\|_1 \|f\|_p = \|f\|_p$. (C.64) については，たとえば，黒田成俊『関数解析』（共立出版）の §6.2 を参照されたい．

(iii) 仮定によって，任意の $\delta > 0$ に対して，定数 $\varepsilon_0 > 0$ があって，$|x-y| < \varepsilon_0$ ならば，$|f(x) - f(y)| < \delta$．一方，

$$J_\varepsilon f(x) - f(x) = \int_{|x-y|\leq\varepsilon} \varrho_\varepsilon(x-y)(f(y) - f(x))dy$$

と書けるから，$\varepsilon < \varepsilon_0$ ならば，$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |J_\varepsilon f(x) - f(x)| \leq \delta$．これは，(C.65) を意味する．□

付録 D　基本的な不等式

この付録では，読者の便宜のために，L^p 空間論やフーリエ解析で用いられる基本的な不等式を採録しておく．

1. **ヘルダー (Hölder) の不等式**[*1]．(X, μ) を測度空間とする．条件 $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1}$ をみたす任意の p, q, r とすべての $f \in \mathsf{L}^p(X, d\mu)$, $g \in \mathsf{L}^q(X, d\mu)$ に対して，$fg \in \mathsf{L}^r(X, d\mu)$ であり，

$$\|fg\|_{\mathsf{L}^r(X,d\mu)} \leq \|f\|_{\mathsf{L}^p(X,d\mu)} \leq \|g\|_{\mathsf{L}^q(X,d\mu)}$$

が成り立つ．

2. **ハウスドルフ-ヤング (Hausdorff-Young) の不等式**[*2]．条件 $1 \leq p \leq 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ をみたす任意の p, q とすべての $f \in \mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ に対して，f の超関数の意味でのフーリエ変換 $\hat{f}$ は $\mathsf{L}^q(\mathbb{R}^d)$ に属し，

$$\|\hat{f}\|_{\mathsf{L}^q(\mathbb{R}^d)} \leq (2\pi)^{(d/2 - d/p)}\|f\|_{\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)}$$

が成り立つ．

3. **ヤングの不等式**[*3]．条件 $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1 + r^{-1}$ をみたす任意の p, q, r とすべての $f \in \mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d), g \in \mathsf{L}^q(\mathbb{R}^d)$ に対して，$f * g \in \mathsf{L}^r(\mathbb{R}^d)$ であり，

$$\|f * g\|_{\mathsf{L}^r(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{\mathsf{L}^q(\mathbb{R}^d)}$$

が成り立つ．

[*1] 証明については，たとえば，伊藤清三『ルベーグ積分入門』（裳華房）の pp.165–166 を参照．

[*2] 証明については，たとえば，M. Reed and B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics*, vol.I, (Academic Press, 1972) の p.11(Theorem IX.8) を参照．

[*3] 証明については，たとえば，黒田成俊『関数解析』（共立出版）の p.97 を参照．

索　　引

第 I 巻：1～242 頁，第 II 巻：243～476 頁，付録 (1)～(64).

ア　行

カ　行

サ　行

タ　行

ナ　行

ハ　行

マ 行

ヤ 行

ラ　行

ワ　行

著者略歴

新井朝雄（あらい あさお）

1954年　埼玉県に生まれる
1979年　東京大学大学院
　　　　理学研究科修士課程修了
現　在　北海道大学大学院
　　　　理学研究科数学専攻教授
　　　　理学博士

江沢　洋（えざわ ひろし）

1932年　東京都に生まれる
1960年　東京大学大学院
　　　　数物系研究科博士課程修了
現　在　学習院大学理学部教授
　　　　理学博士

朝倉物理学大系 8
量子力学の数学的構造 II　　定価はカバーに表示

1999年7月10日　初版第1刷

著　者　新　井　朝　雄
　　　　江　沢　　　洋
発行者　朝　倉　邦　造
発行所　株式会社 朝　倉　書　店

東京都新宿区新小川町6-29
郵便番号　162-8707
電　話　03(3260)0141
FAX　03(3260)0180
http://www.asakura.co.jp

〈検印省略〉

三美印刷・渡辺製本

ISBN 4-254-13678-1　C3342　　Printed in Japan